MODUL MATRIKULASI FISIKA

I T A T S
Institut Teknologi Adhi Tama Surabaya

Untuk Kalangan Sendiri

KATA PENGANTAR

Buku Modul Fisika ini merupakan buku yang dapat digunakan sebagai buku ajar matrikulasi kuliah Fisika untuk mahasiswa di Institut Teknologi Adhi Tama Surabaya. Buku ini memenuhi kebutuhan pembelajaran Fisika yang membangun mahasiswa agar memiliki sikap ilmiah, objektif, jujur, berfikir kritis, bisa bekerjasama maupun bekerja mandiri sesuai dengan tuntutan kurikulum.

Materi pokok yang diberikan meliputi materi mekanika, yaitu Kinematika, Dinamika, kerja dan Usaha, Momentum dan Rotasi. Sedang pokok bahasan Besaran dan Vektor kami berikan untuk melandasi dalam menyelesaikan soal-soal materi pokok yang banyak melibatkan besaran vektor. .

Pada setiap bab diberikan contoh-contoh soal dan soal latihan untuk membantu memahami konsep materi yang diberikan dan diharapkan peserta mampu menerapkan rumusan yang ada. Dengan program ini mahasiswa mampu membaca buku-buku teks fisika sehingga dapat memperlancar perkuliahan fisika.

Penyusun menyampaikan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu hingga tersususunnya modul ini dan menyadari bahwa buku ini masih ada kekurangan dalam penyusunannya, namun penyusun berharap buku ini dapat bermanfaat bagi bapak/ ibu dosen dan mahasiswa dalam proses belajar mengajar. Tak lupa kritik dan saran dari semua pengguna buku ini sangat diharapkan untuk memperbaiki modul ini.

Surabaya, Juli 2010
Tim Penyusun Modul Fisika
Program Matrikulasi ITATS

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
BAB I : BESARAN VEKTOR	1
BAB II : KINEMATIKA PARTIKEL	14
BAB III : DINAMIKA PARTIKEL	29
BAB IV : KERJA DAN ENERGI	39
BAB V : DINAMIKA ROTASI	54
REFERENSI	

BAB I

BESARAN DAN VEKTOR

1.1 BESARAN

Fisika adalah ilmu yang mempelajari keadaan dan sifat-sifat benda serta perubahannya, mempelajari gejala-gejala alam, mempelajari struktur materi serta hubungan antara satu gejala dengan gejala lainnya.

Besaran adalah keadaan dan sifat-sifat benda yang diukur. Besaran fisika dibedakan menjadi 2 yaitu

1. Besaran dasar adalah besaran yang tidak dapat dinyatakan dengan besaran lain yang lebih sederhana, dalam fisika dikenal 7 macam besaran dasar yaitu panjang, massa, waktu, arus listrik, suhu, intensitas cahaya, jumlah mol.
2. Besaran turunan adalah besaran yang dapat dinyatakan/ diturunkan dari besaran dasar, misalnya kecepatan, percepatan, gaya, momentum.

Untuk memudahkan pernyataan suatu besaran dengan besaran dasar, dinyatakan suatu symbol yang disebut *dimensi*. Untuk besaran dasar mekanika (panjang, massa dan waktu) berturut-turut mempunyai dimensi [L],[M]dan[T]. Adapun besaran-besaran turunan, misalnya kecepatan, percepatan, gaya, momentum mempunyai dimensi :

$Kecepatan = LT^{-1}$ $\qquad$ $Gaya = MLT^{-2}$

$Percepatan = LT^{-2}$ $\qquad$ $Momentum = MLT^{-1}$

Dalam persamaan-persamaan fisika yang setiap bagian (suku) berisi besaran-besaran, maka setiap bagian dimensinya harus sama.

Dalam sistem SI, satuan besaran dasar beserta symbol masing-masing satuan dapat dilihat pada tabel 1-1

Tabel 1-1 Satuan Besaran Dasar

No	Besaran Dasar	Satuan	Symbol	Dimensi
1	Panjang	Meter	m	L
2	Massa	Kilogram	kg	M
3	Waktu	Sekon	s	T
4	Arus listrik	Amper	A	I
5	Suhu	Kelvin	K	O
6	Intensitas cahaya	Candela	cd	J
7	Gram molekul	Mole	mol	N

Contoh 1.1

Carilah dimensi dari pernyataan berikut : Energi potensial (E_p) dan Momentum (p)

Penyelesaian :

$$E_p = m\ g\ h = kg\ (m/s^2)m = M\ (L/T^2)L = ML^2T^{-2}$$

$$p = m.v = kg(m/s) = M\frac{L}{T} = M\ L\ T^{-1}$$

1.2 SISTEM SATUAN

Penggunaan satuan-satuan dalam kaitan antara besaran yang satu dengan besaran yang lain perlu diatur, suatu sistem yang mengatur penggunaan satuan-satuan adalah sistem satuan. Ada 4 (empat) macam sistem satuan, yaitu :

a. Sistem statis (besar dan kecil)
b. Sistem dinamis (MKS dan CGS)
c. Sistem Inggris (absolute dan teknik)
d. Sistem Internasional (SI)

Pada tabel 1-2 berikut ini akan kita lihat satuan beberapa besaran mekanika dalam sistem satuan yang lain.

Tabel 1-2 satuan besaran mekanika

Sistem Satuan	Panjang	Waktu	Massa	Gaya
Statis Besar	**m**	**s**	**kgm**	**kg.gaya**
Statis Kecil	**cm**	**s**	**grm**	**gr.gaya**
Dinamis Besar	**m**	**s**	**kg**	**Newton**
Dinamis Kecil	**cm**	**s**	**gr**	**dyne**
Inggris Absolute	**ft (foot)**	**s**	**lbm (pound mass)**	**pdl (poundal)**
Inggris Teknik	**Ft**	**s**	**slug**	**lbf (pound force)**

Dalam sistem satuan Inggris, selain foot, panjang seringkali dinyatakan dalam satuan yang lain (inci dan mil).

Untuk menyatakan satuan besaran dari sistem satuan tertentu ke sistem satuan lainnya diperlukan angka konversi, berikut ini beberapa angka konversi :

1 inci = 2,54 cm
1 foot = 1,2 in
1 foot = 0,305 m
1 mil = 5280 ft
1 yard = 3 ft

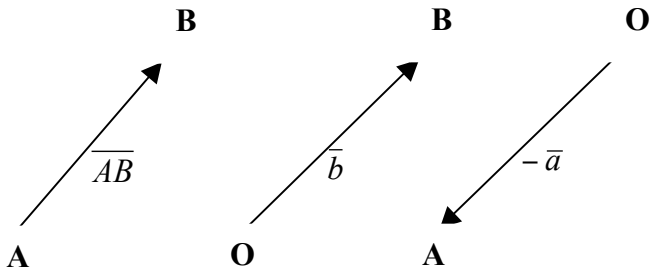
1 Ibm = 0,45359 kgm
1 gr = 10^{-3} kg
1 slug = 32,174 Ibm
1 Ibf = 32,174 pdl
1 N = 1 kg . m/s^2

1 Angstrom (A^o) = 10^{-10} m
1 mikron (μ m) = 10^{-6} m
1 nano m (n m) = 10^{-9} m

1.3 VEKTOR

Besaran-besaran fisika seperti kecepatan, percepatan, gaya, momentum ditentukan oleh besar dan arah dalam ruang, besaran yang demikian dinamakan **besaran vektor.** Besaran yang hanya ditentukan oleh besarnya dinamakan **besaran skalar**, misalnya massa, temperatur, energi volume dan sebagainya.

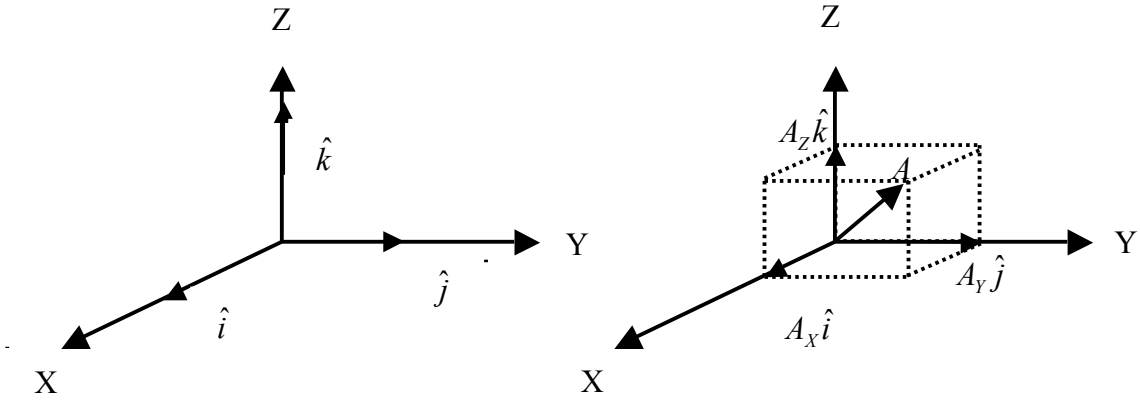
Besaran vektor digambarkan dengan garis lurus beranak panah ; panjang garis menyatakan besar vektor dan arah panah menyatakan arah vektor. Vektor dari titik A ke titik B diberi simbol AB sedang vektor dari titik pusat koordinat (titik 0) ke titik A diberi simbol a, seperti pada gambar 1.1



Gambar 1.1 Gambar vektor

1.3.1 Vektor Satuan

Vektor satuan adalah sebuah vektor tak berdimensi yang didefinisikan mempunyai besar 1 satuan dan menunjuk kesuatu arah tertentu. Untuk memudahkan operasi besaran vektor, setiap vektor dapat diuraikan menjadi komponen-komponen kearah sumbu-sumbu koordinat. Dalam koordinat kartesian, vektor satuan kearah sumbu x, y dan z berturut-turut : $\hat{i},\ \hat{j}\ dan\ \hat{k}$. Contoh sebuah vektor $\overline{A}$ diuraikan sesuai dengan komponen koordinat $A_X\hat{i},\ A_Y\hat{j},\ dan\ A_Z\hat{k}$ maka dapat ditulis $\overline{A} = A_X\hat{i} + A_Y\hat{j} + A_Z\hat{k}$



Gambar 1.2. Vektor satuan dalam koordinat kartesian

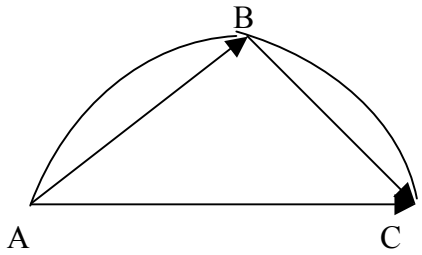
1.3.2 Penjumlahan Vektor

Suatu partikel bergerak dengan lintasan lengkung dari titik A ke B, kemudian bergerak dengan lintasan lengkunga dari B ke C ; hasilnya partikel berpindah dari A ke C merupakan resultan perpindahan dari A ke B dan perpindahan dari B ke C. Perpindahan semacam ini tidak dapat dijumlahkan secara aljabar biasa melainkan dengan dijumlahkan secara vektor.

$\overline{AB}$ = vektor perpindahan dari A ke B

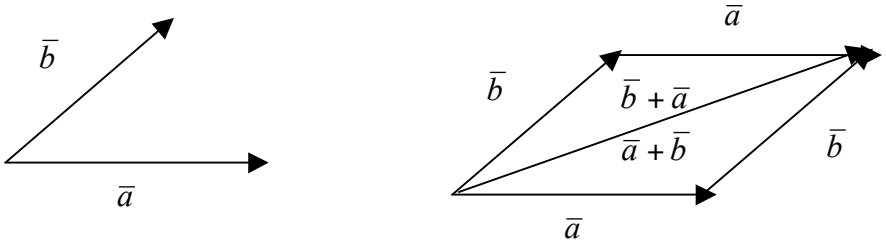
$\overline{BC}$ = vektor perpindahan dari B ke C

$\overline{AC}$ = vektor perpindahan dari A ke C



Gambar 1.3 Vektor perpindahan

Jika dua vektor akan dijumlahkan, misal vektor $\bar{a}$ dan vektor $\bar{b}$, maka penjumlahan tersebut dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :
Vektor $\bar{b}$ digeser sejajar dengan dirinya hingga pangkal vektor $\bar{b}$ berimpit dengan ujung $\bar{a}$, vektor $\bar{a}+\bar{b}$ adalah vektor dari pangkal $\bar{a}$ ke ujung vektor $\bar{b}$ pindahan; atau vektor $\bar{a}$ digeser sejajar dengan dirinya hingga pangkal $\bar{a}$ berimpit dengan ujung $\bar{b}$, vektor $\bar{b}+\bar{a}$ adalah vektor dari pangkal $\bar{b}$ ke ujung $\bar{a}$ pindahan.



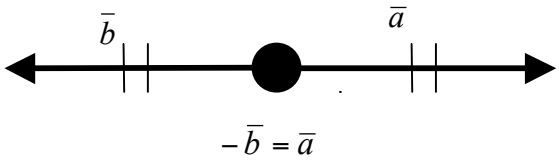
Gambar 1.4 Penjumlahan vector

Dari gambar 1.4 terlihat bahwa :

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.1)$$

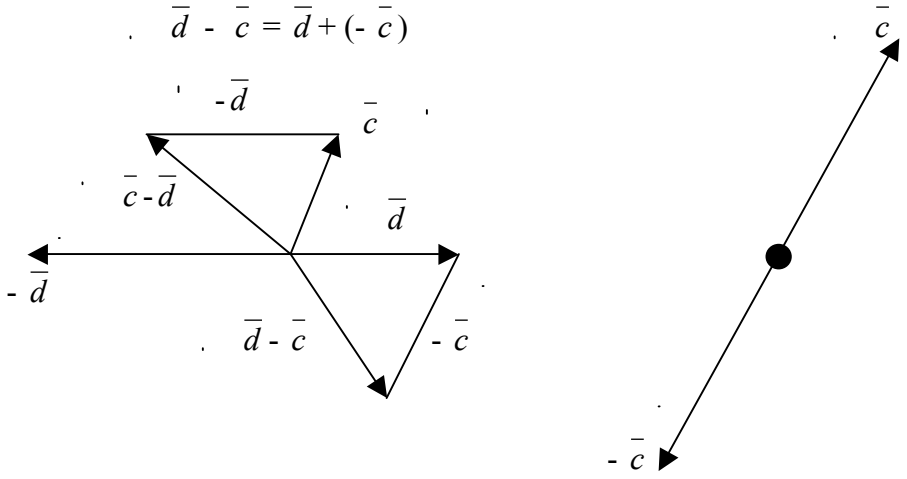
1.3.3 Pengurangan Vektor

Dua vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ besarnya sama dan arahnya berlawanan maka vektor $\bar{b}$ dinamakan vektor negative dari vektor $\bar{a}$ atau sebaliknya.



Gambar 1.5 Vektor negative

Pada prinsipnya pengurangan vektor adalah penjumlahan vector dengan vektor negatifnya, misalnya : $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$



Gambar 1.6 Pengurangan vector

Dari Gambar 1.6 terlihat bahwa : anti komutatif

$$\bar{d} - \bar{c} = -(\bar{c} - \bar{d}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.2)$$

1.3.4 Perkalian Vektor

Sebagaimana besaran-besaran scalar, besaran-besaran vektor juga dapat dikalikan untuk mendapatkan besaran fisika dengan dimensi lain. Karena besaran vektor mempunyai arah, maka perkalian vektor tidak dapat dilakukan dengan menggunakan aturan-aturan aljabar biasa. Ada tiga macam perkalian yanag akan dibicarakan :

a. Perkalian vektor dengan scalar.
b. Perkalian scalar dari dua vektor.
c. Perkalian vektor dari dua vektor.

a. Perkalian vektor dengan skalar.

Suatu vektor dikalikan scalar adalah vektor. Misalnya vector $\bar{a}$ dikalikan dengan k $(k = skalar)$, adalah vektor yang besarnya sama dengan k$\bar{a}$, sedang arahnya sama dengan arah $\bar{a}$ bila k positif, atau arahnya berlawanan dengan arah vector $\bar{a}$ bila k negative. Perkalian skalar dengan vektor ini bersifat komutatif :

$$k\bar{a} = \bar{a}k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.3)$$

b. Perkalian skalar dari dua vektor.

Perkalian skalar dari dua vektor juga dikenal dengan nama perkalian titik dari dua vektor. Perkalian skalar dari dua vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$, ditulis $\bar{a}.\bar{b}$, hasilnya adalah skalar, didefinisikan :

$$\bar{a}.\bar{b} = ab \ \cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.4)$$

dengan θ = sudut antar vektor $\bar{a}$ *dan* $\bar{b}$

$\bar{a}.\bar{b}$ dapat ditulis $(a)(b \ \cos\theta)$, yaitu besarnya vektor $\bar{a}$ dikalikan proyeksi vektor $\bar{b}$ pada arah vektor $\bar{a}$ atau dapat juga ditulis $\bar{a}.\bar{b} = (a \ \cos\theta)(b)$, yaitu proyeksi vektor $\bar{a}$ kearah vektor $\bar{b}$ dikalikan besarnya vektor $\bar{b}$. Perkalian scalar dari dua vetkor bersifat komutatif :

$$\bar{a}.\bar{b} = \bar{b}.\bar{a} \ \text{atau} \ ab \ \cos\theta = ba \ \cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.5)$$

c. **Perkalian vektor dari dua vektor**.

Perkalian vektor dari dua vektor dikenal dengan perkalian silang dari dua vektor, didefinisikan :

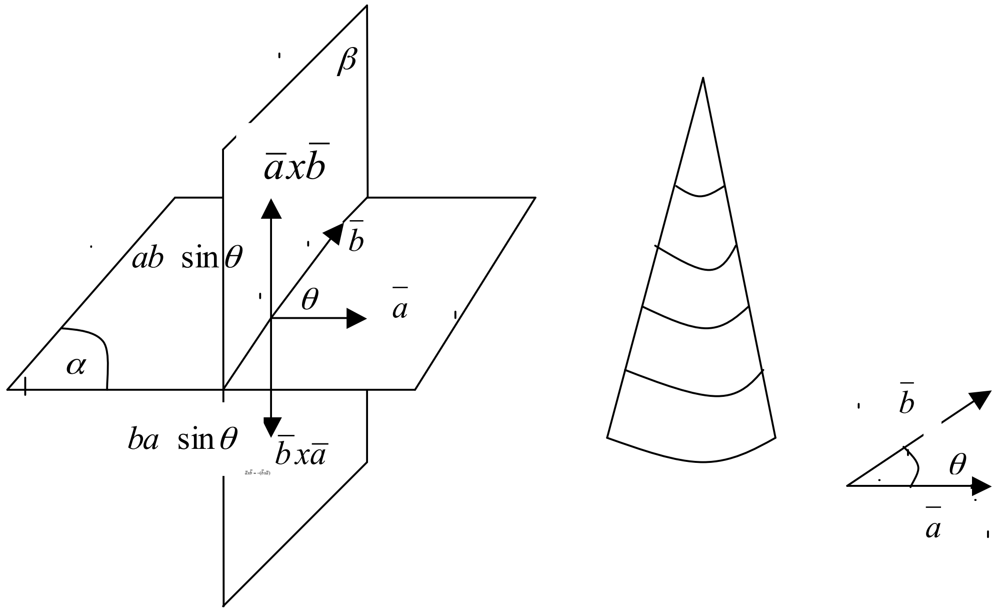
$\bar{a}x\bar{b}$ = adalah vektor yang besarnya $ab \ \sin\theta$ arahnya adalah arah maju skrup kanan bila diputar dari arah vektor $\bar{a}$ kearah vektor $\bar{b}$ melalui sudut terkecil (Gambar 1.7). Pada Gambar 1.7 vektor $\bar{a}$ dalam bidang (α), sedang vector $\bar{b}$ berimpit dengan perpotongan bidang alpha (α) dan bidang beta (β) saling tegak lurus, sedang vector $\bar{a}x\bar{b}$ terdapat dalam bidang , besar vektor

$$\bar{a}x\bar{b} = ab \ \sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.6)$$

dengan θ = sudut antara arah vektor $\bar{a}$ dan vektor $\bar{b}$.
dengan memperhatikan definisi $\bar{a}x\bar{b}$, maka bersifat anti komutatif

$$\bar{a}x\bar{b} = -(\bar{b}x\bar{a}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.7)$$

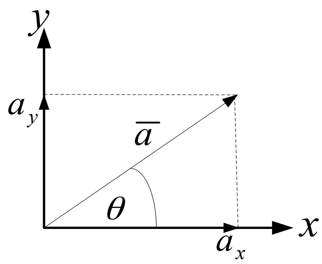
lihat Gambar 1.7.



Gambar 1.7. Perkalian silang $\bar{a}$ x $\bar{b}$

1.3.5 Komponen Vektor dan Vektor Satuan

Untuk memudahkan operasi besaran vektor, setiap vektor dapat diuraikan menjadi komponen-komponen kearah sumbu-sumbu koordinat. Dalam bidang datar, vektor $\vec{a}$ dapat diuraikan menjadi komponen a_x *dan* a_y (lihat Gambar 1.8).



Gambar 1.8. Komponen vektor dalam bidang datar.

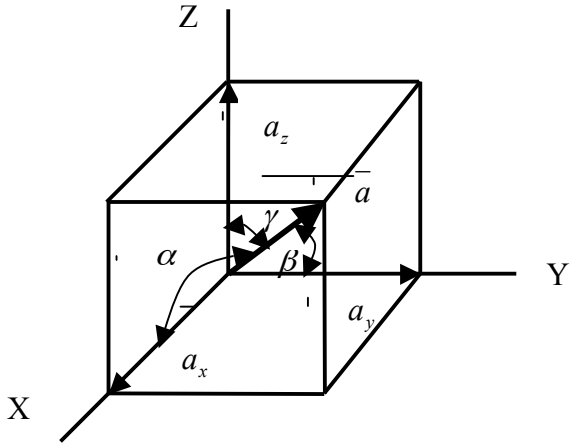
Vektor $\bar{a}$ dapat diuraikan menjadi

$$a_x = a \cos\theta \text{ dan } a_y = a \sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.8)$$

Besar vektor $\bar{a} = |\bar{a}| = a$ dan dapat ditulis $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Arah vektor $\bar{a}$ mengapit sudut θ dengan sumbu x, dengan : $\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$

Dalam koordinat ruang, vektor $\bar{a}$ dapat diuraikan menjadi komponen-komponen $a_x, a_y \; dan \; a_z$ (Gambar 1.9)



Gambar 1.9. Komponen vektor dalam ruang.

Besar vektor $\bar{a} = |\bar{a}| = a$ dan dapat ditulis $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Arah vektor $\bar{a}$ mengapit sudut α, β , γ berturut-turut dengan sumbu x, y dan z dengan :

Misal : $\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ dan $\bar{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$

maka penjumlahan, pengurangan, perkalian titik dan perkalian silang dari dua vektor dapat dilakukan sebagai berikut :

a. Penjumlahan dua vektor :

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.9)$$

b. Pengurangan dua vektor :

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.10)$$

c. Perkalian titik dua vektor : $\bar{a}.\bar{b}$

dengan memperhatikan definisi $\bar{a}.\bar{b} = ab \cos\theta$, maka

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 0 \; dan \; \hat{i}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{j} = 1$ jadi

$$\bar{a}.\bar{b} = (a_x.b_x) + (a_y.b_y) + (a_z.b_z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.11)$$

d. Perkalian silang dua vektor :

dengan memperhatikan definisi $\bar{a}x\bar{b} = ab \sin\theta$, maka

$\hat{i}x\hat{i} = \hat{k}x\hat{k} = \hat{j}x\hat{j} = 0$ dan

$\hat{i}x\hat{j} = \hat{k}, \;\; \hat{j}x\hat{i} = -\hat{k}$

$\hat{k}x\hat{i} = \hat{j}, \;\; \hat{i}x\hat{k} = -\hat{j}$

$\hat{j}x\hat{k} = \hat{i}, \;\; \hat{k}x\hat{j} = -\hat{i}$

$$\bar{a}x\bar{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})x(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

$$\bar{a}x\bar{b} = a_xb_y(\hat{i}x\hat{j}) + a_xb_z(\hat{i}x\hat{k}) + a_yb_x(\hat{j}x\hat{i}) + a_yb_z(\hat{j}x\hat{k}) + a_zb_x(\hat{k}x\hat{i}) + a_zb_y(\hat{k}x\hat{j})$$

$$\bar{a}x\bar{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots (1.12)$$

persamaan (1.12) dapat juga ditulis dalam bentuk determinan :

$$\bar{a}x\bar{b} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

$$\bar{a}x\bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\hat{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots (1.13)$$

Contoh 1.2

Diketahui 3 titik A (1, 2, 3), B (3, 6, 5) & C (2, 5, 4)

a. Hitung besar dan arah vektor : $\overline{AB}$
b. Hitung besar dan arah vektor : $\overline{BC}$
c. Hitung besar dan arah vektor : $\overline{AC}$

Penyelesaian :

$\bar{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\bar{b} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}$, $\bar{c} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$

a. $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (3\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$$\overline{AB} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$$

Arah vektor ab mengapit sudut α, β, γ dengan sumbu berturut – turut x, y, z

$$\alpha = COS^{-1}\frac{2}{2\sqrt{6}} = COS^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\beta = COS^{-1}\frac{4}{2\sqrt{6}} = COS^{-1}\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\gamma = COS^{-1}\frac{2}{2\sqrt{6}} = COS^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}$$

b. $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b} = (2\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}) - (3\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k})$

$$\overline{BC} = -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

Arah vektor bc mengapit sudut α, β, γ dengan sumbu berturut – turut x, y, z

$$\alpha = COS^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta = COS^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\gamma = COS^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

c. $\overline{AC} = \bar{c} - \bar{a} = (2\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$$\overline{AC} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

Arah vektor ac mengapit sudut α, β, γ dengan sumbu berturut – turut x, y, z

$$\alpha = COS^{-1}\frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\beta = COS^{-1}\frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$\gamma = COS^{-1}\frac{1}{\sqrt{11}}$$

Contoh 1.3

Seseorang menarik benda dengan gaya besarnya $60N$ arahnya mengapit sudut $60^o, 30^o, 37^o$ beturut-turut dengan sumbu x, y dan z.. Benda tersebut pindah dari titik A (3, 4, 2) ke titik B (4, 5, 4) dengan koordinat dalam meter. Jika usaha adalah perkalian titik vektor pergeseran dengan gaya yang menyebabkan pergeseran tersebut, tentukan usaha oleh gaya orang terebut.

Penyelesaian :

$$\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}) - (3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\overline{AB} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

Vektor gaya

$$\overline{F} = (60\ \cos 60^o)\hat{i} + (60\ \cos 30^o)\hat{j} + (60\ \cos 37^o\hat{k})$$

$$\overline{F} = 30\hat{i} + 52\hat{j} + 48\hat{k}$$

Usaha

$$W = \overline{AB} \bullet \overline{F} = 1.30 + 1.52 + 2.48$$

$$W = 30 + 52 + 96 = 178\ \ joule$$

Contoh 1.4

Sebuah benda dengan massa 5 kg terletak pada titik (3, 5, 2) diyatakan dalam meter. Bergerak pada kecepatan 10 m/s dengan arah mengapit sudut $60^o, 30^o, 37^o$ berturut-turut dengan sumbu x, y dan z.

a. jika momentum sebuah benda adalah perkalian massa benda dengan kecepatan hitungkan momentum benda.
b. jika momentum anguler didefinisikan sebagai perkalian silang antara vektor posisi dengan vektor momentum, tentukan momentum anguler momentum.

Penyelesaian:

a. Momentum $\bar{p} = m.\bar{v}$

$$\bar{p} = 5(10\ \cos 60^o \hat{i} + 10\ \cos 30^o \hat{j} + 10\ \cos 37^o \hat{k})$$

$$\bar{p} = 25\hat{i} + 43{,}3\hat{j} + 40\hat{k}$$

b. Momentum anguler $\bar{L} = \bar{r}\ x\ m.\bar{v}$

$$\bar{L} = (3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}) x (25\hat{i} + 43{,}3\hat{j} + 40\hat{k})$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & 2 \\ 25 & 43{,}3 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\bar{L} = (200 - 86{,}6)\hat{i} - (120 - 50)\hat{j} + (129{,}9 - 125)\hat{k}$$

$$\bar{L} = 113{,}4\hat{i} - 70\hat{j} + 4{,}9\hat{k}$$

Contoh 1.5

Sebuah vektor gaya F pada titik (5, 2, 4) dinyatakan dalam meter, besar gaya $60N$ arahnya mengapit sudut $60^o, 30^o, 37^o$ dengan sumbu berturut-turut x, y, z. jika vektor momen gaya adalah perkalian silang dari vektor titik tangkap dengan vektor gaya : $\bar{\tau} = \bar{r}\ x\ \bar{F} = vektor\ momen\ gaya$

Hitung vektor momen gaya tersebut

Penyelesaian:

$\bar{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ dan

$$\bar{F} = (60\ \cos 60^o \hat{i} + 60\ \cos 30^o \hat{j} + 60\ \cos 37^o \hat{k})$$

$$\bar{F} = 30\hat{i} + 52\hat{j} + 48\hat{k}$$

$$\bar{\tau} = \bar{r}\ x\ \bar{F} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & 4 \\ 30 & 52 & 48 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\tau} = (96 - 208)\hat{i} - (240 - 120)\hat{j} + (260 - 60)\hat{k}$$

$$\bar{\tau} = -112\hat{i} - 120\hat{j} + 200\hat{k}$$

Latihan Soal :

1. Carilah dimensi dari pernyataan berikut :
   a) Energi Kinetik (E_K)
   b) Tekanan (P)
   c) Gaya berat (W)

2. Diketahui 3 titik M (3, 5, 1), N (2, 6, 4) & P (4, 1, 3)

a) Hitung besar dan arah vektor : $\overline{MN}$

b) Hitung besar dan arah vektor : $\overline{NP}$

c) Hitung besar dan arah vektor : $\overline{PM}$

3. Diketahui 3 vektor $\bar{a} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\bar{b} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ & $\bar{c} = -3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$

Hitung besar

a) $\bar{a} \bullet \bar{b}$

b) $\bar{a} \bullet \bar{c}$

c) $\bar{c} \bullet \bar{b}$

4.. Diketahui 3 vektor $\bar{a} = -5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\bar{b} = -\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ & $\bar{c} = 3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$

Hitung besar dan arah

a) $\bar{a}\ x\ \bar{b}$

b) $\bar{a}\ x\ \bar{c}$

c) $\bar{c}\ x\ \bar{b}$

5. Seseorang menarik benda dengan gaya besarnya $100N$ arahnya mengapit sudut $53^o, 60^o, 37^o$ beturut-turut dengan sumbu x, y dan z.. Benda tersebut pindah dari titik A (2, 5, 1) ke titik B (5, 3, 6) dengan koordinat dalam meter. Jika usaha adalah perkalian titik vektor pergeseran dengan gaya yang menyebabkan pergeseran tersebut, **tentukan** usaha oleh gaya orang terebut.

6. Sebuah benda dengan massa 10 kg terletak pada titik (4, 2, 3) diyatakan dalam meter. Bergerak pada kecepatan 20 m/s dengan arah mengapit sudut $30^o, 60^o, 53^o$ berturut-turut dengan sumbu x, y dan z.

a) Jika momentum sebuah benda adalah perkalian massa benda dengan kecepatan hitungkan momentum benda.

b) Jika momentum anguler didefinisikan sebagai perkalian silang antara vektor posisi dengan vektor momentum, tentukan momentum anguler momentum

7. Sebuah vektor gaya F pada titik (6, 3, 2) dinyatakan dalam meter, besar gaya $80N$ arahnya mengapit sudut $53^o, 60^o, 45^o$ dengan sumbu berturut-turut x, y, Jika vektor momen gaya adalah perkalian silang dari vektor titik tangkap dengan vektor gaya :

$\bar{\tau} = \bar{r}\ x\ \bar{F} = vektor\ momen\ gaya$

Hitung vektor momen gaya tersebut

8. Diketahui 3 vektor $\bar{a} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\bar{b} = -4\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$ & $\bar{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$

Hitung dan sebutkan vektor atau skalar (kalau vektor hitung besar dan arah)

a) $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$

b) $\bar{b} \bullet (\bar{a} \times \bar{c})$

c) $(\bar{c} \bullet \bar{b}) \bullet \bar{a}$

9. Diketahui 3 vektor $\bar{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\bar{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ & $\bar{c} = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$

Hitung dan sebutkan vektor atau scalar (kalau vektor hitung besar dan arah)

a) $(\bar{a} + \bar{b}) - \bar{c}$

b) $(\bar{a} - \bar{c}) - \bar{b}$

c) $(\bar{c} - \bar{b}) + \bar{a}$

d) $(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{a}$

10. Diketahui 3 vektor $\bar{a} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$, $\bar{b} = \hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ & $\bar{c} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$

Hitung dan sebutkan vektor atau skalar(kalau vektor hitung besar dan arah)

a) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c}$

b) $(\bar{a} \times \bar{c}) - \bar{b}$

c) $(\bar{c} - \bar{b}) \bullet \bar{a}$

d) $(\bar{b} - \bar{c}) \times \bar{a}$

BAB II

KINEMATIKA PARTIKEL

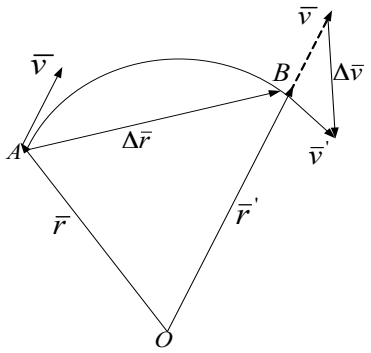
Sebuah benda dikatakan dalam keadaan bergerak bila kedudukan benda tersebut dari saat ke saat berubah. Ilmu tentang gerakan ini tanpa memperhatikan gaya-gaya yang menyebabkan gerakan itu disebut KINEMATIKA yang berasal dari bahasa “kinema”.

2.1 PENGERTIAN KECEPATAN DAN PERCEPATAN.

Telah diungkapkan diatas bahwa benda bergerak bila posisinya berubah. Bila benda bergerak, berarti benda tersebut mempunyai kecepatan yang dapat dijelaskan sebagai berikut:

Misalkan bahwa pada saat mula-mula t_0 , benda berada dititik A yang terhadap acuan 0 posisinya dinyatakan oleh vektor $\bar{r}$ setelah. Selang waktu Δt, yaitu pada saat $t = t_0 + \Delta t$, benda berada di titik B yang berada pada posisi $\bar{r}'$ dari 0. Dalam hal ini kecepatan rata-rata benda tersebut didefinisikan sebagai:

$$\bar{v}_{rata^2} = \frac{\bar{r}' - \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \quad \text{..... (2.1)}$$



Gambar 2.1 Posisi pertikel yang pindah dari A ke B.

Harga kecepatan rata-rata ini tergantung pada selang waktu Δt; artinya untuk selang waktu yang berada $\bar{v}_{rata^2}$ dapat mempunyai jelas bahwa nilai rata-rata ini tidak memberi gambaran yang terinci dan lengkap, walaupun dalam hal-hal tertentu tetap berguna besaran kecepatan lain yang memberi informasi yang tepat adalah kecepatan sesaat, yaitu kecepatan benda tersebut pada suatu saat. Kecepatan sesaat ini di dapat bila Δt diambil sangat singkat, atau secara matematika dapat ditulis

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \text{..... (2.2)}$$

Seringkali selama pergerakannya kecepatan suatu benda berubah, baik arah atau besar ataupun kedua-duanya. Adanya perubahan kecepatan menandakan bahwa benda tersebut mengalami percepatan . misalkan bahwa kecepatan benda di A adalah $\bar{v}$ sedang di B kecepatannya $\bar{v}'$, maka percepatan rata-rata didefinisikan sebagai.

$$\bar{a}_{rata^2} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}' - \bar{v}}{\Delta t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.3)$$

Sedangkan percepatan sesaatnya ditulis dengan

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.4)$$

Karena $\bar{v} = \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{dt}}$, maka dapat ditulis

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.5)$$

Dalam beberapa buku, kecepatan sebagai vektor dan besarnya kecepatan sering dibedakan menjadi velocity yang dalam bahasa Indonesia adalah kecepatan dan speed yang berarti kelajuan. Buku ini tidak membedakan menjadi kecepatan dan kelajuan dan hanya digunkan istilah kecepatan saja yang harus dimengerti dari konteks ceritanya.

Bila ditanyakan dalam vektor satuan untuk koordinat kartesian, maka posisi kecepatan dan percepatan partikel dapat ditulis sebagai berikut:

Posisi : $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ..... (2.6)

Kecepatan : $\bar{v} = \frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{dt}} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

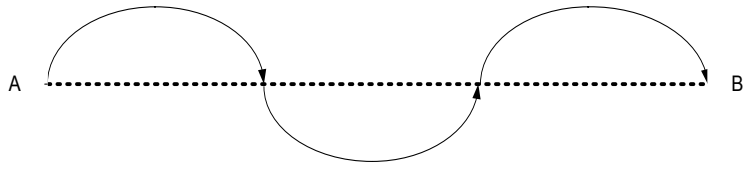
$$\bar{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.7)$$

percepatan : $\bar{a} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$

$$\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\ \bar{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.8)$$

Contoh 2.1

Sebuah sepeda motor bergerak dari titik A ke titik B melalui lintasan berliku sejauh 43 km seperti di tunjukkan gambar bila waktu yang di perlukan adalah 30 menit dengan jarak perpindahan $\overline{AB}$ 27 km, maka tentukan kecepatan rata-rata sepeda motor.



Penyelesaian:

Untuk menentukan kecepatan rata-rata maka yang diperlukan adalah jarak perpindahan bukan panjang lintasan sehingga

$$v_{rata^2} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{27.10^3}{30.60} = 15 m/s \text{ untuk lintasan lurus}$$

dan $v_{rata^2} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{43.10^3}{30.60} = 23{,}89 m/s$ untuk lintasan berliku-liku

2.2 GERAK LURUS

Suatu benda dikatakan gerak lurus bila lintasannya merupakan garis lurus. Gerak lurus ada bermacam-macam yaitu,

a. **Gerak Lurus Beraturan**
b. **Gerak Lurus dengan Percepatan Tetap**
c. **Gerak Lurus dengan Percepatan Berubah.**

Karena benda bergerak lurus, maka untuk mempermudah perhitungan dengan mengabaikan notasi vektor dianggap bahwa lintasannya sejajar dengan salah satu sumbu koordinat, misalnya sumbu x dengan posisi benda dinyatakan dalam koordinat x.

2.2.1 Gerak Lurus Beraturan

Pada gerak lurus beraturan kecepatan adalah konstan, berarti tidaaak ada percepatan, atau a = 0

$$v = kons\tan = \frac{dx}{dt} \qquad \text{atau} \qquad dx = v\ dt$$

$$\int_{X_1}^{X_2} dx = v\int_{t_1}^{t_2} dt \quad \text{diperoleh} \qquad x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

maka diperoleh jarak yang ditempuh dalam waktu Δt, yaitu:

$$\Delta x = v\Delta t \quad \text{..... (2.9)}$$

Contoh 2.2

Seorang pelari jarak 150 meter dapat mencapai garis finish dalam waktu 12 sekon. Bila selama berlari, pelari bergerak dengan kecepatan konstan selama 8 sekon sehingga menempuh jarak 90 m, kemudian berlari dengan kecepatan konstan hingga finish, maka berapa kecepatan pelari tersebut ?

Penyelesaian :

$\Delta x = v.\Delta t$ $\qquad\qquad$ $\Delta x = x_2 - x_1 = 150 - 90 = 60m$

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{60}{4} = 15 m/s$ $\qquad\qquad$ $\Delta t = t_2 - t_1 = 12 - 8 = 4s$

2.2.2 Gerak Lurus Dengan Percepatan Tetap

Bila percepatan benda yang bergerak itu diketahui, maka kecepatan benda dapat dihitung dengan mengintegrasi sebagai berikut :

$$a = \frac{dv}{dt}, \text{ atau dapat ditulis } dv = a\ dt$$

bila pada saat mula-mula $(t = 0)$ kecepatan adalah v_0 dan pada saat t kecepatan v, maka persamaan di atas dapat diintegralkan dengan batas integrasi dapat diisi sebagai berikut :

$$\int_{x_0}^{v} dv = a\int_0^t dt \qquad \text{Sehingga} \qquad v - v_0 = a(t - 0) \quad \text{atau}$$

$$v = v_0 + at \quad \text{..... (2.10)}$$

Selanjutnya, $v = \frac{dx}{dt}$, atau dapat ditulis $dx = v\,dt$

$dx = (v_0 + at)dt$, dengan cara mengintegralkan diperoleh

$$\int dx = \int (v_0 + at)\,dt$$

Bila pada saat t = 0, benda ada di x_0 dan pada saat t ada di x, maka batas integrasinya :

$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)dt$ Sehingga $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

atau $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ..... (2.11)

Perhatikan bahwa disini x tidak menyatakan jarak yang ditempuh melainkan menyatakan posisi benda pada saat t. Jarak yang ditempuh dalam hal ini $x - x_0$.

Selain persamaan (2.10) dan (2.11) terdapat suatu rumus lain untuk gerak lurus dengan percepatan tetap, yang menghubungkan kecepatan v dengan posisi x. Hubungan ini dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

Dari Persamaan (2.10) dengan $v = v_0 + at$, didapat $t = \frac{v - v_0}{a}$. Substitusi t ini dalam Persamaan (2.11) menghasilkan

$$x = x_0 + v_0 \frac{v - vo}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$x = x_0 + \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{v^2 + v_0^2 - 2vv_0}{a} = x_0 + \frac{1}{2}\frac{v^2 - v_0^2}{a}$$

Jadi $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ atau

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad \text{..... (2.12)}$$

Salah satu contoh gerak lurus dengan percepatan konstan adalah jatuh bebas. Jadi untuk gerak jatuh bebas, persamaan (2.10), (2.11) dan (2.12) dapat dipakai dengan mengganti a dengan percepatan gravitasi g.

Contoh 2.3

Dari atas menara dilemparkan sebuah bola lurus keatas dengan kecepatan 5 m/s.

a. Hitunglah jarak tertinggi yang dapat di capai bola.
b. Berapa waktu di butuhkan untuk menempuh jarak tersebut ?
c. Berapa kecepatan bola ketika melewati kedudukan mula-mula?
d. Hitunglah kecepatan bola 3 detik setelah dilempar
e. Dimana bola tersebut berada pada saat tersebut pada soal (d)?
dengan g =10 m/s^2.

Penyelesaian:

a. Misalnya bola mencapai ketinggian maksimum B, berarti $V_B = 0$. dianggap gerak bola positif ke atas.

$v_B = v_A + gt \dashrightarrow 0 = 5 - 10t \dashrightarrow t = \frac{5}{10} = 0{,}5s$

$y_B = y_A + v_A t + \frac{1}{2} gt^2$ dengan $y_A = 0$ maka $y_B = 0 + 5.(0{,}5) + \frac{1}{2}(-10)(0{,}5)^2 = 1{,}25m$

Jadi jarak maksimum yang ditempuh = 1,25 m di A.

b. Waktu untuk menempuh jarak tersebut = 0,5 s.

c. Setelah mencapai B, bola akan bergerak ke bawah.
Perhatikan gerak B $\rightarrow A'$:

$y_A = y_B + v_B t + \frac{1}{2} gt^2 \dashrightarrow 0 = 1{,}25 + 0t + \frac{1}{2}(-10)t^2 \dashrightarrow t^2 = \frac{-1{,}25}{-5} = 0{,}25 \rightarrow t = 0{,}5s$
$t = 0{,}3s$ jadi $t_A \dashrightarrow B = t_B \dashrightarrow A'$

$v_A = v_B + gt = 0 + (-10)(0{,}5) = -5m/s$

Ini berarti bahwa arah kecepatan ke bawah, tetapi besarnya tepat sama seperti ketika dilempar keatas. Jadi pada ketinggian sama, kecepatan bola ketika naik sama dengan kecepatannya ketika turun.

d. Misalnya pada waktu 3 sekon bola ada di C,

$v_C = v_A + gt = 5 + (-10)3 = -25m/s$

Jadi pada t = 3 sekon, kecepatan bola 25 m/s, arah ke bawah.

e. $y_C = y_A + v_A t + \frac{1}{2} gt^2 = 0 + (5)(3) + \frac{1}{2}(-10)(3)^2 = -30m$

Jadi bola berada di titik C yang terletak 30 m di bawah A.

2.2.3 Gerak Lurus Dengan Percepatan Berubah

Jenis gerak lurus yang lain adalah gerak lurus dengan harga percepatannyatidak lagi konstan, sehingga persamaan (2.10, (2.11) dan (2.12) tidak dapat di gunakan. Untuk memecahkan permasalahan-permasalahan semacam ini ada informasi tambahan yang di perlukan ; artinya harus dijelaskan bagaimana percepatan ini berubah.

Cara percepatan berubah beraneka ragam, dan tiap cara mempunyai pemecahan masing-masing. Perubahan percepatan dapat di nyatakan dengan 2 cara, yaitu percepatan yang dinyatakan sebagai fungsi posisi $a = f(x)$atau fungsi waktu $a = f(t)$ Pemecahan matematika untuk ke dua pernyatan itu berbeda dan dapat dilihat dari contoh 2.4 dan 2.5 berikut ini.

Contoh 2.4

Sebuah partikel bergerak menurut sumbu x dengan percepatan $a = 2t + 5$, a dalam m/s^2, t dalam detik.
Pada keadaan awal partikel berada pada x = 3 m dan kecepatannya = 5 m/s.
Tentukan:

a. Posisi pada t= 1 s
b. Kecepatan rata-rata antara t = 1 s dan t = 3 s
c. Kecepatanya pada t = 2 s

d. Posisi pada saat kecepatannya = 15 m/s
e. Kecepatannya pada saat percepatan = 21 m/s^2.

Penyelesaian

a. Dalam soal ini percepatan adalah fungsu waktu , $a = 2t + 5$
Karena dv = a dt, maka

$$v = \int (2t + 5)dt + c_1 = t^2 + 5t + c_1$$

Pada t = 0, v = 5 m/s $\rightarrow 5 = (0)^2 + 5(0) + c_1$ atau $c_1 = 5$

$v = t^2 + 5t + 5$ selanjutnya

$$x = \int v dt + c_2 = \int (t^2 + 5t + 5)dt + c_2 = \frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 5t + c_2$$

Pada t = 0, x = 2 $\rightarrow 3 = \frac{1}{3}(0)^3 + \frac{5}{2}(0)^2 + 5(0) + c_2$ atau $c_2 = 3$

Maka $x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 5t + 3$

Untuk t = 1 maka diperoleh $x = \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{5}{2}(1)^2 + 5(1) + 3 = 10{,}83$

Jadi posisi pertikel pada t = 1 adalah x = 10,83 m.

b. Untuk t = 3 s maka diperoleh $x_2 = \frac{1}{3}(3)^3 + \frac{5}{2}(3)^2 + 5(3) + 3 = 49{,}5$

Untuk t = 1 s maka diperoleh $x_1 = \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{5}{2}(1)^2 + 5(1) + 3 = 10{,}83$

Sehingga $v_{rata^2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{49{,}5 - 10{,}83}{3 - 1} = 19{,}335 m/s$

c. Untuk t = 2 s maka diperoleh $v = (2)^2 + 5(2) + 5 = 19 m/s$

d. $15 = (t')^2 + 5(t') + 5$ persamaan dapat ditulis $t'^2 + 5t' - 10 = 0$
dengan menggunakan persamaan kwadrat diperoleh

$$t' = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4.1.(-10)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{2} = \frac{-5 \pm 8{,}1}{2} = 1{,}55 s$$

sehingga $x = \frac{1}{3}(1{,}55)^3 + \frac{5}{2}(1{,}55)^2 + 5(1{,}55) + 3 = 1{,}24 + 6 + 7{,}75 + 3 = 17{,}99 m$

e. $21 = 2t'' + 5 \rightarrow 2t'' = 21 - 5 = 16 \rightarrow t'' = 8 s$

$v = (8)^2 + 5(8) + 5 = 109\ m/s.$

Contoh 2.5

Percepatan sebuah benda yang bergerak pada sumbu x ditentukan oleh $a = 4x + 3$; a dinyatakan dalam cm / s^2 dan x dalam cm. bila kecepatan benda di titik x = 0 adalah 12 cm/s,
Hitunglah, a. kecepatan benda di titik x = 3 cm
b. percepatan benda ketika kecepatannya 15 cm/s

Penyelesaian :

a. $a = 4x + 3 = \frac{dv}{dt}$

Bila ditempuh $\int dv = \int (4x+3)dt + c,$ maka integral di ruas kanan tak dapat dihitung, karena hubungan antara x dan t tidak diketahui.
Karena itu ditulis

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \quad \text{atau} \quad a\ dx = v\ dv$$

bila diintegrasikan :

$$\int v\,dv = \int a\,dx = \int (4x+3)dx + c \text{ maka diperoleh } \frac{1}{2}v^2 = 2x^2 + 3x + c$$

Dengan $x = 0,\ v = 12 \Rightarrow \frac{1}{2}(12)^2 = 2(0)^2 + 3(0) + c$ atau $c = 72$

Jadi $\frac{1}{2}v^2 = 2x^2 + 3x + 72$

$v^2 = 4x^2 + 6x + 144$ atau $v = (4x^2 + 6x + 144)^{1/2}$

Bila $x = 3$, maka $v = \pm\sqrt{4(3)^2 + 6(3) + 144} = \sqrt{198} = \pm 14{,}1\ cm/s$

b. Misalkan v = 25 pada titik x', maka

$25^2 = \left[4(x')^2 + 6x' + 144\right]$ atau $625 = 4(x')^2 + 6x' + 144$

Dengan cara menyederhanakan diperoleh $4(x')^2 + 6x' - 481 = 0$

$$x'_{12} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 7696}}{8} = \frac{-6 \pm \sqrt{7732}}{8} = \frac{-4 \pm 87{,}9}{8}$$

Jadi $x'_1 = \frac{83{,}9}{8} = 10{,}49$ dan $x'_2 = \frac{-91{,}9}{8} = -11{,}49$

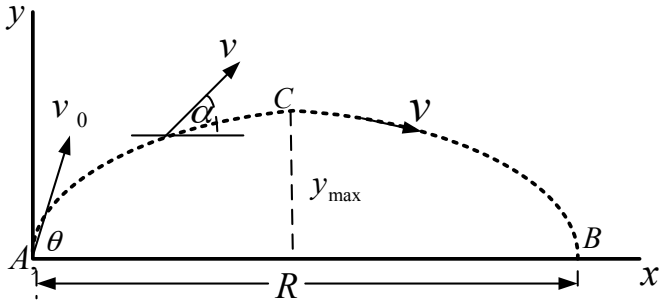
Untuk $x'_1 = 10{,}49$, maka percepatan $a = 4(10{,}49) + 3 = 44{,}96 cm/s^2$

2.3 GERAK MELENGKUNG

Lintasan getaran tidak selalu lurus tetapi dapat juga melengkung. Ada 2 gerak melengkung yang istimewa, yaitu gerak parabola dan gerak melingkar.

2.3.1 Gerak Parabola

Gerak parabola adalah gerak benda yang lintasannya berbentuk parabola. Gerak semacam ini dijumpai antara lain pada gerak peluru, gerak bola yang dilempar tidak vertikal. Pada gerak parabola selalu akan ada percepatan yang arahnya vertikal ke bawah dan konstan. Dalam hal gerak peluru atau bola tadi, percepatan tersebut adalan percepatan gravitasi.



Gambar 2.2 Lintasan Peluru

Perhatikan peluru yang ditembakkan dengan sudut miring θ dan kecepatan v_0 dari titik A. Seperti yang telah dijelaskan di atas, peluru tersebut selalu dipengaruhi oleh percepatan gravitasi g. Selanjutnya buat sumbu x – y melalui A, yang dalam hal ini dipilih horiontal dan vertikal.

Pada keadaan awal $(t = 0)$, benda ada di A (x dan y = 0) dan komponen kecepatan adalah

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \text{ dan } v_{0y} = v_0 \sin\theta \qquad (2.13)$$

Sedang percepatan hanya mempunyai komponen y saja, yaitu $a_y = g$

Jadi, dari waktu ke waktu

$$v_x = v_{0x} = kons\tan \text{ dan } v_y = v_{0y} - gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.14)$$

dan resultante kecepatan adalah

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.15)$$

yang membentuk sudut

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.16)$$

Kecepatan benda di tiap titik selalu digambarkan oleh garis yang menyinggung lintasan seperti terlihat pada Gambar 2.2

Bahwa gerak peluru membentuk lintasan parabola dapat dibuktikan dengan menurunkan persamaan lintasannya sebagai berikut :

Posisi peluru tiap saat ditentukan oleh koordinat x dan y

$$x = x_0 + v_{0x}\, t = x_0 + v_0 \cos\theta_0\, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.17)$$

Dan $$y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + v_0 \sin\theta_0\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.18)$$

Untuk mendapatkan persamaan lintasan, eliminir t dari kedua persamaan di atas. Dengan mengingat bahwa di sini $x_0 = y_0 = 0$, maka dari Persamaan (2.15) diperoleh.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$$

substitusi ini ke Persamaan (2.16) menghasilkan

$$y = v_0 \sin\theta_0 (\frac{x}{v_0 \cos\theta_0}) - \frac{1}{2} g (\frac{x}{v_0 \cos\theta_0})^2 \text{atau}$$

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{1}{2}(\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta_0})x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.19)$$

disini terlihat bahwa Persamaan (2.19) berbentuk

$$y = ax^2 + bx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.20)$$

yang merupakan persamaan parabola.

Suatu hal menarik lain pada gerak peluru ini adalah menghitung jarak tembak R dan tinggi maksimum y max (lihat Gambar 2.2). di titik B : y = 0, sedang $y_0 = 0$. jadi dari Persamaan (2.19):

$$0 = (\tan\theta_0)R - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta_0}R^2 \text{ atau } R = \frac{\tan\theta_0}{\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta_0}} = \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}$$

Atau $R = \dfrac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \dfrac{2v_0^2 \ \frac{1}{2}\sin 2\theta_0}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$ ..... (2.21)

Dari Persamaan (2.18) terlihat bahwa R akan maksimum (jarak tembak paling jauh), bila sin 2 $\theta_0 = 1$ *atau* 2 $\theta_0 = 90°$

Sehingga $\theta_0 = 45°$

Ini berarti bahwa jarak tembak akan maksimum bila peluru ditembakkan dengan sudut $\theta_0 = 45°$.

Untuk menentukan tinggi maksimum:

Di titik C, $v_y = 0$, sehingga $t = \dfrac{v_{ay}}{g} = \dfrac{v_0 \sin\theta_0}{g}$

Dari Persamaan 2.18 diperoleh

$$y_{maks} = v_0 \sin\theta_0 \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g^2}$$

$$y_{maks} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g} \quad \text{..... (2.22)}$$

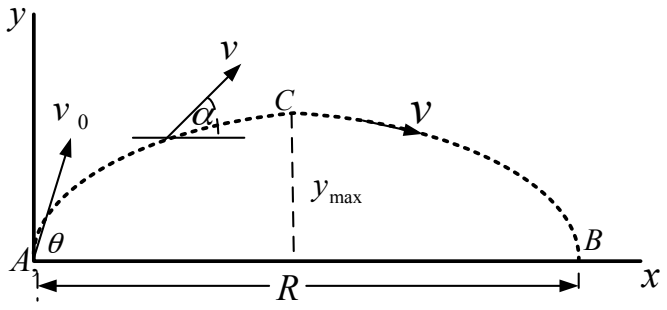
Contoh 2.6

Sebuah peluru ditembakkan dari tanah dengan kecepatan 300 m/s dengan sudut 37^o terhadap horizontal.

Hitunglah :

a. Kecepatan dan posisi peluru setelah 5 detik.
b. Jarak tembak
c. Waktu yang dibutuhkan untuk kembali lagi di tanah.

Penyelesaian:



a. Dengan sumbu x,y seperti gambar,

$v_{0x} = v_0 \cos 37^o = (300)(0{,}8) = 240$

Dan $v_{0y} = v_0 \sin 37^o = (300)(0{,}6) = 180$

Misalkan setelah 10 sekon peluru ada di A, maka

$v_{ax} = v_{0x} = v_0 \cos 37^o = (300)(0{,}8) = 240$

$v_{ay} = v_{0y} - gt = 300 \sin 37^o - (10)(5) = 300(0{,}6) - 50 = 180 - 50 = 130$

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{(240)^2 + (130)^2} = \sqrt{57600 + 16900} = \sqrt{74500} = 273 \ m/s$$

$$\tan \alpha = \left|\frac{v_{ay}}{v_{ax}}\right| = \left|\frac{130}{240}\right| = 0{,}542 \rightarrow \alpha = \arctan \ 0{,}542 = 28^o$$

Selanjutnya:

$x_a = v_{ax}t = (240)(5) = 1200\,m$

$y_a = v_{ay}t - \frac{1}{2}gt^2 = (130)(5) - \frac{1}{2}(10)(5)^2 = 650 - 125 = 525\,m$

Jadi posisi A adalah (1200 ; 525)m.

b. Dari Persamaan (2.20) jarak tembak adalah

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 = \frac{(300)^2}{10}\sin(2.37^o) = 9000.0{,}96 = 8640m$$

c. di B, $y_b = 0 = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0 = 0 + (180.t - \frac{1}{2}(10)t^2$

$$t = \frac{180}{5} = 36 \ s$$

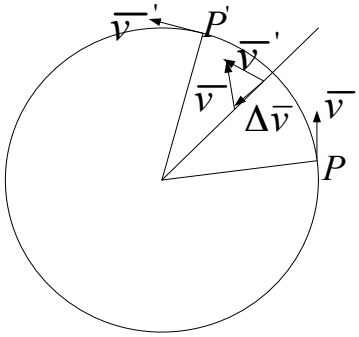
Jadi waktu yang dibutuhkan untuk kembali ke tanah adalah 36 s.

2.3.2 Gerak Melingkar

Pada gerak melingkar, lintasan benda terbentuk lingkaran. Ada dua jenis gerak melingkar, yaitu gerak melingkar beraturan dan gerak melingkar dipercepat.

2.3.2.1 Gerak Melingkar Beraturan

Pada gerak ini besarnya kecepatan tetap, tetapi arahnya jelas berubah dari waktu ke waktu. Ini berarti bahwa vektor kecepatan berubah, atau dengan perkataan lain ada percepatan. Berikut ini akan dijelaskan tentang percepatan tersebut.



Gambar 2.3 Gerak Melingkar Beraturan

Perhatikan gerak melingkar dengan jari-jari R dari P ke P′. Arah kecepatan di P dan P′ adalah seperti Gambar 2.3

Dari Gambar tersebut terlihat adanya perubahan kecepatan : $\Delta\overline{v} = \overline{v}' - \overline{v}$

Bila $\theta <<$, maka tali busur P. P′ dapat dianggap sama dengan busurnya, sehingga dapat ditulis $P.P' = v.\Delta t$

Dari Gambar 2.3 dapat dilihat bahwa, O P P′ sebangun dengan P′ B A, berarti perbandingan $\frac{\Delta v}{v} = \frac{P.P'}{R} = \frac{v\Delta t}{R}$ atau $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$

Dari definisi percepatan sesaat $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ dan didapat besarnya $a = \frac{v^2}{R}$

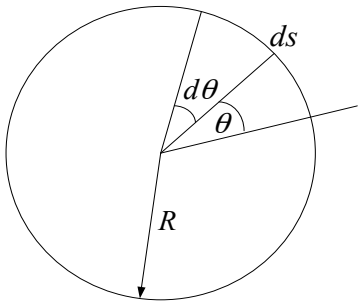
Ini adalah percepatan yang ada disetiap kali benda bergerak melingkar, dan biasa disebut sebagai percepatan normal atau radial atau tepatnya sentripetal, karena arahnya radial menuju ke pusat lingkaran.

Karena $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, maka arah $\bar{a}$ sama dengan arah $\Delta\bar{v}$

Ini berarti bahwa $\bar{a}$ tegak lurus $\bar{v}$, padahal arah $\bar{v}$, arah garis singung pada lingkaran. Jadi a mempunyai arah radial. Karena itu lebih jelas di tuliskan

$$a_R = \frac{v^2}{R} \quad \text{..... (2.23)}$$

Gerak benda melingkar sering kali lebih menguntungkan jika dinyatakan dalam besaran-besaran sudut anguler, yaitu kecepatan sudut ω dan percepatan sudut α. Hubungan antara besaran linier dan anguler didapat dengan cara sebagai berikut :



Gambar 2.4 Perubahan sudut pada gerak melingkar

Posisi benda dalam hal ini tidak lagi dinyatakan oleh x atau $\bar{r}$, tetapi oleh sudut θ. Misalkan benda yang melingkar dengan jari-jari R mengalami perpindahan ds, yang sesuai dengan perubahan sudut dθ, maka dapat ditulis $ds = R.d\theta$

Kecepatan (linier)

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

Didefinisikan

Kecepatan sudut $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} rad/s$ maka

$$v = R\omega \quad \text{..... (2.24)}$$

Bila persamaan (2.24) disubstitusikan ke Persamaan (2.23), maka didapat

$$a_R = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 \quad (2.25)$$

Contoh 2.7

Sebuah roda diameter 3 meter berputar dengan kecepatan 150 ppm.

Hitunglah :

a. Frekuensi
b. periode
c. kecepatan anguler
d. kecepatan linier suatu titik pada tepi roda

Penyelesaian :

a. ω = 150 ppm = 150 putaran per menit $\omega = \frac{150.2\pi}{60} = 5\pi \ rad/s$

Frekuensi $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5\pi}{2\pi} = 2{,}5 \ Hz$

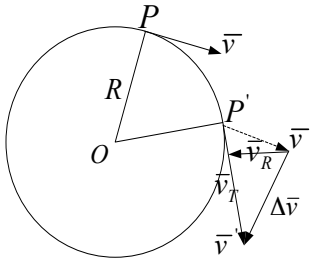
b. periode $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 \ s$

c. Kecepatan anguler $\omega = \frac{150.2\pi}{60} = 5\pi \ rad/s$

d. kecepatan linier $v = \omega.R = 5\pi.1{,}5 = 7{,}5\pi \ m/s$

2.3.2.2 Gerak Melingkar Dipercepat

Pada gerak melingkar jenis ini, selain arah besar kecepatan pun berubah.



Gambar 2.5 Gerak melingkar dipercepat

Dalam waktu Δt, partikel bergerak dari P ke P′ dan kecepatan berubah dari $\bar{v}$ menjadi $\bar{v}'$ atau $\Delta\vec{v} = \bar{v}' - \bar{v}$

Uraikan $\Delta\bar{v}$ ini menjadi komponen radial dan tangensial, maka

$$\Delta\vec{v} = \bar{v}_R - \bar{v}_T$$

Perubahan kecepatan pada arah radial, seperti yang telah diturunkan sebelum ini menghasilkan percepatan radial

$$a_R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_R}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Percepatan tangensial

$$a_T = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_T}{\Delta t} = \frac{dv_T}{dt}$$

karena arah kecepatan benda yang bergerak melingkar selalu tangensial pada lintasannya, maka dapat ditulis

$a_T = \frac{dv}{dt}$ dari Persamaan (2.20),

maka $a_T = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$

Percepatan sudut $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} rad/s^2$

Sehingga

$$a_T = R\alpha \quad \text{..... (2.26)}$$

Dengan demikian resultante percepatan benda yang bergerak melingkar adalah :

$$a = a_R + a_T \quad \text{..... (2.27)}$$

Atau besarnya $a = \sqrt{a_R^2 + a_T^2}$ ..... (2.28)

Tabel 2.1. Analogi gerak lurus dan gerak melingkar

Gerak Lurus	**Gerak Melingkar**
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

Contoh 2.8

Sebuah roda yang diameternya 2 m mempunyai kecepatan angular yang berkurang secara uniform dari 120 ppm pada t = 0 sehingga berhenti pada t = 5 sekon. Hitung percepatan tangensial dan percepatan normal sebuah titik di tepi roda pada t = 3 sekon.

Penyelesaian :

Kecepatn sudut mula-mula $\omega_0 = 120\ ppm = \frac{120.2\pi}{60} rad/s = 4\pi\ rad/s$

Setelah 5 sekon $\omega_t = 0$

Karena berkurang secara uniform, maka α konstan jadi analog dengan $v_t = v_o + a\ t$, maka $\omega_t = \omega_0 + \alpha_t t \rightarrow 0 = 4\pi + \alpha_t 5 \rightarrow \alpha_t = \frac{(-4\pi)}{5} = -\frac{4}{5}\pi\ rad/s^2$

Diameter $d = 2\ m \rightarrow jari - jari\ R = 1\ m$

Percetapan tangensial $\alpha_T = R\alpha = 1.(\frac{4}{5}\pi) = \frac{4}{5}\pi\ m/s^2$

Pada $t = 3s$ $\omega_2 = 4\pi - \frac{4}{5}\pi.3 = 1{,}6\pi\ rad/s$

$v_2 = R\omega_2 = (1).(1{,}6\pi) = 1{,}6\pi\ m/s$

Jadi : Percepatan normal $a_R = \frac{v^2}{R} = \frac{(1{,}6\pi)^2}{1} = 2{,}56\pi^2\ m/s^2$

Latihan soal

1. Seorang naik sepeda menempuh jarak sejauh 2 km dengan waktu 8 $menit$
Hitung kecepatan rata-rata dalam satuan
a) km/jam
b) $m/menit$
c.) $cm/\det$

2. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus yang dinyatakan dengan persamaan $x = 9t - 2t^2$ dengan x dalam cm dan t dalam detik
a) Kecepatan rata-rata antara $t = 1s$ dan $t = 3s$
b) Kecepatan sesaat ketika $t = 2s$ dan $t = 4s$
c) Waktu yang dibutuhkan ketika benda sampai diam
d) Buatlah grafik x fungsi t, dari $t = 0s$ sampai $t = 10s$

3. Landasan ***take off*** pesawat terbang 1000 m. Selama 40 detik dari keadaan awal diam pesawat terbang bergerak dengan percepatan tetap sehingga setelah diujung landasan lalu terbang.
Berapakah kecepatan pesawat terbang saat lepas dari landasan ?

4. Sebuah partikel bergerak menurut sumbu x dengan percepatan $a = 6t + 3$, a dalam m/s^2, t dalam detik.
Pada keadaan awal partikel berada pada x = 4 m dan kecepatannya = 8 m/s.
Tentukan:
a) Posisi pada $t = 3s$
b) Kecepatan rata-rata antara $t = 2s$ dan $t = 5s$
c) Kecepatanya pada $t = 3s$
d) Posisi pada saat kecepatannya = 15 m/s
e) Kecepatannya pada saat percepatan = 27 m/s^2.

5. Percepatan sebuah benda yang bergerak pada sumbu x ditentukan oleh $a = 9x + 6$, a dinyatakan dalam cm/s^2 dan x dalam cm. bila kecepatan benda di titik x = 0 adalah 10 cm/s,
Hitunglah: **a**) Kecepatan benda di titik x = 8 cm
b) Percepatan benda ketika kecepatannya 16 cm/s

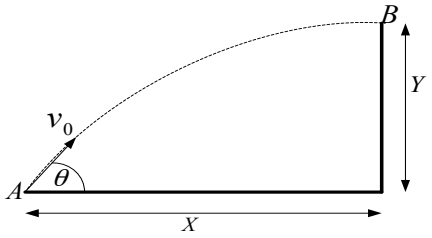
6. Sebuah peluru ditembakkan dari tanah dengan kecepatan 400 m/s dengan sudut 53^o terhadap horizontal.
Hitunglah:
a) Kecepatan dan posisi peluru setelah 4 detik.
b) Jarak tembak ketinggian maksimum
c) Waktu yang dibutuhkan untuk kembali lagi di tanah

7. Sebuah roda berdiameter 1,5 meter berputar dengan kecepatan 190 rpm.
Hitunglah: :
a) Frekuensi dan Periode
b) Kecepatan anguler dan kecepatan linier suatu titik pada tepi roda

8. Sebuah roda yang diameternya 1,8 m mempunyai kecepatan angular yang berkurang secara uniform dari 180 rpm pada $t = 0s$ sehingga berhenti pada $t = 6s$. **Hitung** percepatan tangensial dan percepatan normal sebuah titik di tepi roda pada $t = 4s$.

9. Dari gambar dibawah ini, diketahui $\theta = 60^o, g = 9{,}8m/s^2, Y = 12m$ dan $X = 20m$

Hitung :
a. Kecepatan awal (v_0)
b. Kecepatan (v)di titik B



10. Sebuah mobil bergerak ke utara, kecepatannya berubah dari $v_1 = 54km/jam$ menjadi $v_2 = 36km/jam$. Jarak yang ditempuh sejauh $S = 84km$
Hitung :
a. Percepatan (a)
b. Waktu terjadinya perubahan kecepatan tersebut
c. Jarak yang dtempuh pada saat kecepatan $v_3 = 0$

BAB III

DINAMIKA PARTIKEL

Bab ini akan dibicarakan penyebab gerak partikel pada lintasannya. Mengapa benda-benda dekat permukaan bumi jatuh dengan percepatan konstan? Mengapa bumi bergerak mengelilingi matahari? Mengapa suatu pegas bersosialisasi bila direnggangkan? Ingin mengetahui hal-hal demikian bukan hanya untuk ilmu pengetahuan saja, tetapi juga untuk keperluan teknik dan pemakaian praktis. Pengertian bagaimana suatu gerakan pada umumnya dihasilkan, memungkinkan untuk merencakana mesin-mesin dan peralatan lain yang bergerak sesuai dengan yang diinginkan. Pelajaran tentang hubungan antara gerakan yang akan dibicarakan kemudian, adalah hasil dari analisis yang hati-hati tentang gerakan-gerakan sekitar, dan ekstrapolasi penelitian atau eksperimen sederhana ke konsep-konsep tertentu. Hukum-hukum ini dirumuskan oleh Sir Isaac Newton (1642-1727) sekalipun sudah diperkenalkan sebelumnya oleh Galileo Galilei (1564-1642).

2.1. HUKUM PERTAMA NEWTON

Menurut Galileo diperlukan gaya luar (tangan kita mendorong balok tersebut) untuk mengubah kecepatan benda, tetapi tidak diperlukan gaya luar untuk membuat benda bebas mempunyai kecepatan konstan. Selanjutnya prinsip ini disimpulkan Newton delam hukumnya yang pertama :

> ***Suatu partikel bebas bergerak menurut garis lurus dengan kecepatan konstan atau dalam keadaan diam.***

Hukum Newton ini dikenal pula sebagai hukum inersia atau kelembaban. Dalam hukum ini terkandung pula pernyataan tentang kerangka acuan. Pada umumnya, suatu benda diam atau bergerak tergantung pada kerangka acuan yang dipakai. Seseorang yang duduk di dalam gerbong kereta api menyatakan bahwa teman duduk di sebelahnya dalam keadaan diam. Tetapi orang yang berdiri di luar berpendapat bahwa mereka berdua bergerak bersama.

2.2. MASSA dan HUKUM KEDUA NEWTON

Di dalam bahasa sehari-hari yang dimaksudkan dengan gaya adalah sesuatu yang berhubungan dengan mendorong atau menarik yang mungkin kita kerjakan dengan otot-otot lengan kita. Dari pengalaman diketahui bahwa gerakan suatu benda adalah hasil dari interaksinya dengan benda-benda di sekelilingnya. Misalnya gerakan elektron mengelilingi inti adalah hasil interaksinya dengan inti itu sendiri atau sekitarnya. Interaksi-interaksi ini dikenal sebagai konsep yang disebut gaya. Dinamika pada dasarnya adalah analisis yang ada antara gaya dan perubahan gerak dari suatu benda. Secara matematis dinyatakan dalam hukum kedua newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1)$$

Dengan $\vec{F}$ adalah gaya yang bekerja pada massa m sehingga di dapat percepatan $\vec{a}$. Dalam sistism S.I, $\vec{F}$ adalah Newton, m adalah kg, dan $\vec{a}$ dalam m/s^2.Dapat disimpulkan bahwa hukum pertama Newton adalah keadaan khusus hukum kedua, yaitu keadaan dimana resultan gaya adalah nol.

Bila ada gaya n gaya yang bekerja pada suatu benda, maka persamaan (3.1) dapat dinyatakan dengan :

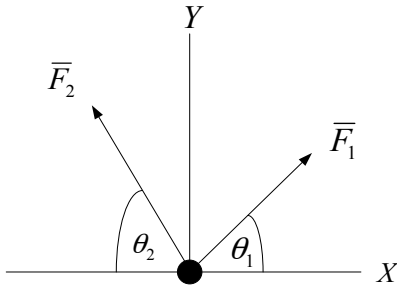
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = m\overline{a} \quad \text{..... (3.2)}$$

Persamaan di atas dapat dinyatakan alam bentuk vektor satuan pada koordinat kartesian sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = m(a_x i + a_y j + a_z k) \quad \text{..... (3.3)}$$

Contoh 3.1

Suatu partikel dikenakan gaya $\overline{F}_1$ dan $\overline{F}_2$ yang membentuk sudut terhadap sumbu horizontal masing-masing θ_1 dan θ_2. bila massa paartikel m, tentukan komponen vektor percepatan yang terjadi.



Penyelesaiaan :

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{F}_i = m\overline{a} \rightarrow \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = m\overline{a}$$

Resultante : $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$

$\overline{F}_1 = F_{1x}\, i + F_{1y}\, j$ dan $\overline{F}_2 = -F_{2x}\, i + F_{2y}\, j$

$F_x = F_{1x}\, i - F_{2x}\, i$ dan $F_y = F_{1y}\, j + F_{2y}\, j$

Besarnya sudut resultante : $\tan\theta = \dfrac{F_y}{F_x} \rightarrow \theta = \arctan\dfrac{F_y}{F_x}$

$\overline{F}_1 = F_1 \cos\theta_1\ i + F_1 \sin\theta_1\ j$ dan $\overline{F}_2 = -F_2 \cos\theta_2\ i + F_2 \sin\theta_2\ j$

$$\sum_{i=1}^{2} \overline{F}_i = (F_1 \cos\theta_1 - F_{2x} \cos\theta_2)i + (F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2)\, j = m\overline{a}$$

Bila $F_1 = 60N\ ; F_2 = 40N\ ; m = 20kg$ dan $\theta_1 = 37^o\ ; \theta_2 = 53^o$

Maka

$$(F_1 \cos\theta_1 - F_2 \cos\theta_2)i + (F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2)\, j = m\overline{a}$$
$$(60\cos 37^o - 40\cos 53^o)i + (60\sin 37^o + 40\sin 53^o)\, j = 20\overline{a}$$
$$(60.0{,}8 - 40.0{,}6)i + (60.0{,}6 + 40.0{,}8)\, j = 20\overline{a}$$
$$(48 - 24)i + (36 + 32)\, j = 20\overline{a} \rightarrow 24i + 48\, j = 20\overline{a}$$
$$\overline{a} = 1{,}2i + 2{,}4\, j$$

2.3. BERAT

Berat suatu benda merupakan gaya tarik gravitasi yang dilakukan bumi terhadap benda tersebut. Seperti pada semua jenis gaya, berat merupakan besaran vektor. Arah

gaya gravitasi tersebut. Seperti semua jenis gaya, berat merupakan besaran vektor. Arah gaya gravitasi adalah menuju pusat bumi. Besaran dari berat dapat dinyatakan dengan ”Pounds” atau “Newton”. Permukaan bumi merupakan kerangka acuan yang cukup baik untuk menerangkan gaya gravitasi. Kita dapat menyatakan untuk benda yang berada dekat dengan permukaan bumi atau sedang mengalami peristiwa jatuh bebas, merupakan pengaruh dari gravitasi bumi. Percepatan yang dialami sebuah benda dengan massa “m” akibat peristiwa jatuh bebas disebut gravitasi “g”. kita dapat menerapkan hukum Newton yang kedua $\overline{F} = m\overline{a}$, dengan menggantikan $\overline{F}$ dengan $\overline{W}$ dan $\overline{a}$ dengan $\overline{g}$, sehingga dinyatakan dengan

$$\overline{W} = m\overline{g} \quad \text{...} \quad (3.6)$$

Dengan $\overline{W}$ dan $\overline{g}$ merupakan vektor yang arahnya menuju pusat bumi, $\overline{W}$ dinyatakan sebagai berat benda.

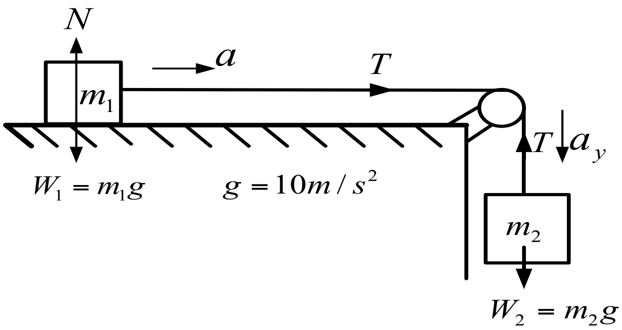
2.4. BEBERAPA PEMAKAIAN DARI HUKUM GERAK NEWTON

Langkah-langkah umum yang perlu dilakukan dalam menyelesaiakan persoalan adalah :

a. Tentukan benda yang akan kita cari pemecahan persoalannya.
b. Setelah bendanya tetentu, kita perhatikan lingkungannya, karena lingkungan ini (bidang miring, pegas, tali, bumi, dsb) mengerjakan gaya pada benda. Sifat atau macam gaya harus jelas.
c. Kemudian dipilih/buat kerangka acuannya, sumbu-sumbu koordinat ini harus menyederhanakan langkah perhitungan.
d. Selanjutnya dibuat diagram gaya-gaya yang bekerja pada benda.
e. Akhirnya kita pakai hukum kedua Newton, untuk masing-masing komponen gaya dan percepatan.

<u>Contoh 3.2</u>

Gambar dibawah menunjukkan suatu balok bermassa m_1, berada pada permukaan horizontal yang licin di tarik oleh tali yang pada ujung lainnya tergantung balok massa m_2 lewat sauatu katrol. Massa tali dan katrol diabaikan dan tidak ada gesekan pada katrol. Tentukan percepatan balok-balok tersebut dan tegangan tali.



<u>Penyelesaian :</u>

Balok m_1 dan m_2 yang gerakannya akan diselidiki. Kita buat diagram gaya-gaya yang bekerja.

Benda I : Sepanjang sumbu x : $T = m_1\ a_x$ .... (1)

Sepanjang sumbu y : $N - W_1 = 0$ ..... (2)

Benda II : Tegangan tali yang bekerja juga T, karena massa tali dapat diabaikan dan tidak ada gesekan pada katrol.

Benda II akan bergerak ke bawah: $m_2 g - T = m_2\ a_y$ ..... (3)

disini $a_x = a_y = a$

Substitusi dari persamaan (1) dan persamaan (2) dan dipakai persamaan (3) diperoleh

$m_2\ g - m_1\ a = m_2\ a$ atau $m_2\ g = m_2\ a\ + m_1\ a$, atau percepatan balok

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dengan g adalah percepatan gravitasi.

Dari persamaan (1) dan (4) diperoleh tegangan tali

$$T = \frac{m_1\ m_2}{m_1 + m_2} g$$

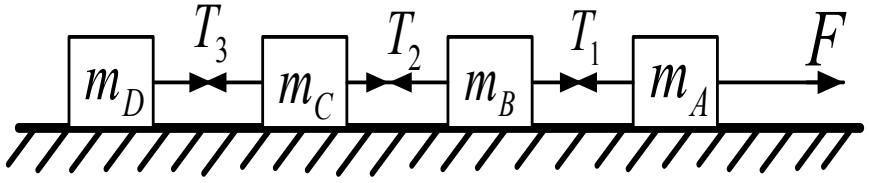
Tampak bahwa tegangan tali T selalu lebih kecil dari m_2 g, yaitu

$$T = m_2 g(\frac{m_1}{m_1 + m_2})$$

Contoh 3.3

Benda A,B,C dan D saling terangkai seperti pada gambar di bawah ini mempunyai massa 30 kg, 23 kg, dan 17 kg dan 10 kg. suatu gaya F = 100 N dikerjakan pada benda A. lantai licin sempurna.

a. Tentukan percepatan yang dialami sistem
b. Tegangan tali masing-masing



Penyelesaian :

a. Benda A, B, C dan D bergerak dengan percepatan konstan yang sama dalam sistem yaitu $\bar{a}$.

Benda A : $F - T_1 = m_A\ a$

Benda B : $T_1 - T_2 = m_B\ a$

Benda C : $T_2 - T_3 = m_C\ a$

Benda A : $T_3 = m_D\ a$

Total persamaan di atas

$$F = (m_D + m_C + m_B + m_A)a \quad \text{atau}$$

$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m_C + m_D} = \frac{100}{30 + 23 + 17 + 10} = \frac{10}{8} = 1{,}25 \ m/s^2$$

dengan arah ke kanan

b. Dengan memasukkan harga F dan a akan diperoleh

$$100 - T_1 = 30\ 1{,}25 \rightarrow T_1 = 100 - 37{,}5 = 62{,}5 \ N$$

$$T_1 - T_2 = 23\ 1{,}25 \rightarrow T_2 = 62{,}5 - 28{,}75 = 33{,}75 N$$

Dan $T_3 = 10\ 1{,}25 = 12{,}5 \ N$

2.5. GAYA GESEK

Bila kita gerakkan suatu balok dengan kecepatan awal $\bar{v}_0$ pada permukaan suatu bidang horizontal, maka setelah beberapa saat blok tersebut akan berhenti bergerak. Ini berarti bahwa ketika balok tersebut bergerak ia mengalami perlambatan $\bar{a}$. Menurut hukum Newton kedua, permukaan bidang melakukan gaya gesek $\bar{F} = m\ \bar{a}$ pada balok tersebut. Bila permukaan suatu benda bergeser pada permukaan lain, masing-masing mengerjakan gaya gesek sejajar permukaan. Gaya gesek pada masing-masing benda arahnya selalu melawan arah gerakan benda tersebut. Sekalipun tidak ada gerakan, gaya gesek tersebut dapat terjadi pada permukaan.

Ketika benda masih dalam keadaan diam, padanya bekerja gaya gesek statis (f_S). Gaya gesek statis maksimum sama besar dengan gaya terkecil yang diperlukan untuk mulai menggerakkan benda. Begitu bergerak gaya gesek yang bekerja diantaranya pemukaan mengecil, sehingga untuk menjaga kecepatan konstan. Gaya gesek yang bekerja ini disebut gaya gesek kinetis (f_K), besar gaya-gaya gesek ini sebanding dengan gaya normal yang bekerja.

Perbandingan gaya gesek statis maksimum dengan gaya normal disebut koefisien gesek statis μ_S, maka dapat ditulis

$$f_S \leq \mu_S\ N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.7)$$

Dimana f_S adalah gaya gesek statis, dan N adalah gaya normal.

Perbandingan gaya gesek kinetis (yang tetap) dengan gaya normal disebut koefisien gaya kinetis μ_k, sehingga

$$f_K = \mu_K\ N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.8)$$

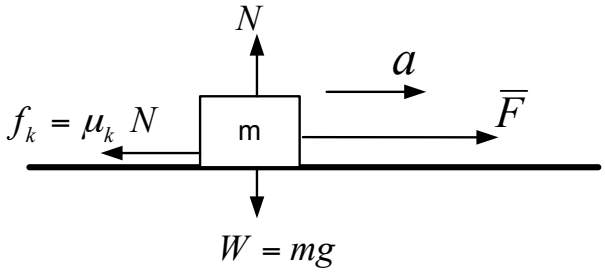
Dimana f_K adalah gaya gesek kinetis

Keduanya μ_S dan μ_K adalah besaran-besaran tak berdimensi yang tergantung pada sifat kedua permukaan μ_S dan μ_K biasanya lebih kecil dari satu. Gaya normal dan gaya gesek selalu tegak lurus.

Contoh 3.5

Suatu benda bermassa m berada pada bidang datar. Sebuah gaya F dalam Newton berusaha menarik benda, bila koefisien gesek kinetis benda terhadap lantai μ_K dan percepatan gravitasi g dalam m/s^2. Berapa percepatan benda dalam sistem?

Penyelesaian :



$\sum \overline{F} = m\,\overline{a}$ dan $f_k = \mu_k N$

Gaya-gaya yang bekerja

Sepanjang sumbu x : $F - f_k = m\,\overline{a} \rightarrow F - \mu_k N = m\,\overline{a}$

Sepanjang sumbu y : $N - W = 0 \rightarrow N = W = m\,g$

Sehingga dapat ditulis,

$$F - \mu_k\, m\, g = m\, a \rightarrow a = \frac{F - \mu_k\, m\, g}{m}$$

Contoh 3.6

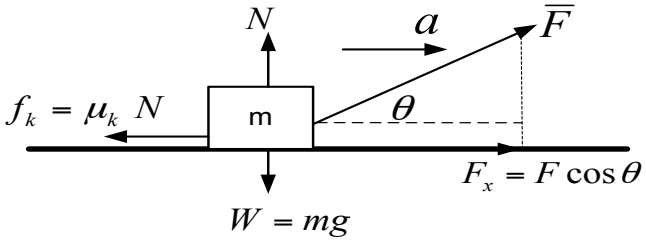
Suatu benda bermassa m berada pada bidang datar. Sebuah gaya F berusaha menarik benda dan gaya membentuk sudut θ terhadap horisontal. Bila koefisien gesek kinetis benda terhadap lantai μ_K. Berapa percepatan benda dalam sistem?

Penyelesaian :

$\sum \overline{F} = m\,\overline{a}$

Gaya-gaya yang bekerja : Sepanjang sumbu x : $F_x = F\cos\theta$ *dan* $f_k = \mu_k N$

Sepanjang sumbu y :



$N - W + F\sin\theta = 0 \rightarrow N = W - F\sin\theta = m\,g - F\sin\theta$

$F\cos\theta - f_K = m\,a \rightarrow F\cos\theta - \mu_k N = m\,a$

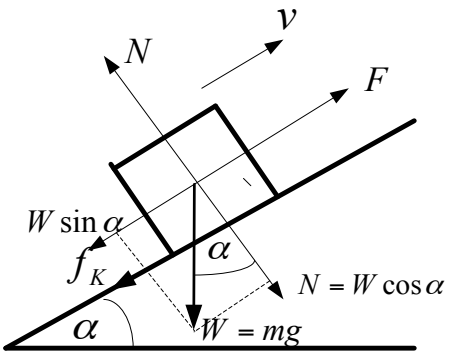
$$F\cos\theta - \mu_k\ (m\ g - F\sin\theta) = m\ a \rightarrow a = \frac{F\cos\theta - \mu_k\ (m\ g - F\sin\theta)}{m}$$

Contoh 3.7

Suatu benda bermassa $m = 1{,}2kg$, berada pada bidang miring yang membuat sudut $\alpha = 30^o$ dengan bidang datar. Berapa besar gaya yang diberikan agar benda bergerak ke atas ? untuk benda bergerak beraturan dengan percepatan konstan $\overline{a} = 0{,}30\ m/s^2$. koefisien gesekan kinetis dengan bidang $\mu_k = 0{,}40$ dan $g = 10m/s^2$.

Penyelesaian :

Benda bergerak ke atas



Dari gambar terlukis diagram gaya-gaya yang bekerja. Tampak dari gambar bahwa gaya gesek f_k selalu melawan arah gerak. Ketika gerakan benda ke atas, arah gaya gesek f_k ke bawah dan ketika benda bergerak ke bawah, arah gaya gesek f_k ke atas.

Persamaan gerak sepanjang bidang datar :

$$F - mg\ \sin\alpha - f_K = m\ a \qquad (1)$$

Sedang $f_K = \mu_K\ N = \mu_K\ W\ \cos\alpha = \mu_K\ m\ g\ \cos\alpha$

Persamaan (1) menjadi :

$$F - m\ g\ (\sin\alpha + \mu_K\ \cos\alpha) = m\ a \rightarrow F - 1{,}2\ 10\ (\sin 30^o + 0{,}4\ \cos 30^o) = 1{,}2\ 0{,}30$$

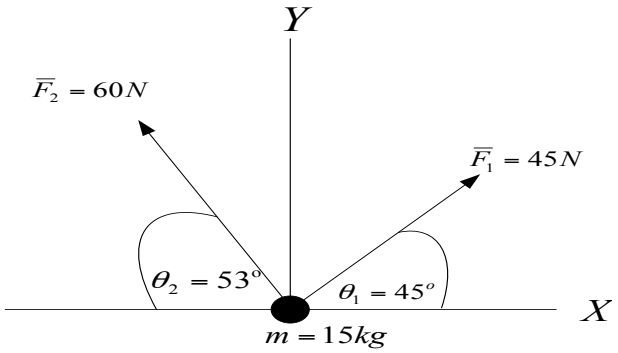
$$F - 1{,}2\ 10\ (0{,}5 + 0{,}4\ 0{,}866) = 1{,}2\ 0{,}30 \rightarrow F - 12(0{,}5 + 0{,}35) = 0{,}36$$

$$F - 12\ (0{,}85) = 0{,}36 \rightarrow F = 10{,}2 + 0{,}36 = 10{,}56\ N$$

Dan $F = 10{,}56\ N$ Newton ke arah atas

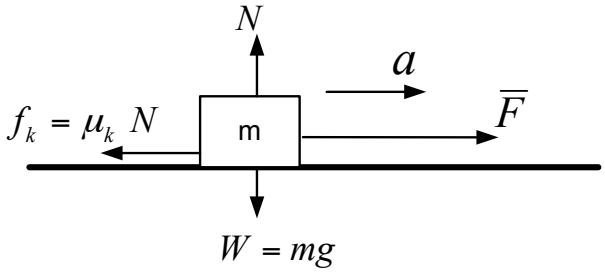
Latihan Soal

1. Dari gambar dibawah ini,
a) Hitung besar, arah resultante gaya
b) Tentukan komponen vektor percepatan yang terjadi

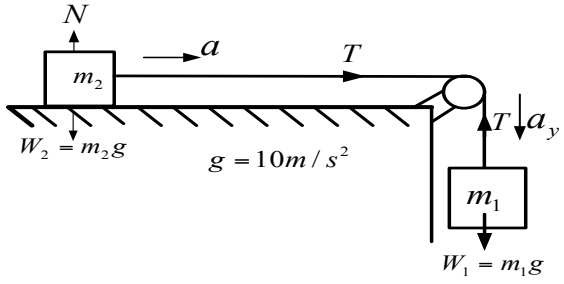


2. Suatu partikel bermassa m dikenakan gaya $\overline{F}_1 = 30N, \overline{F}_2 = 40N, \overline{F}_3 = 20N$ dan $\overline{F}_4 = 25N$ bertitik tangkap sama dan membentuk sudut terhadap sumbu horizontal masing-masing $\theta_1 = 37^o, \theta_2 = 150^o$, $\theta_3 = 240^o$ dan $\theta_4 = 307^o$, bila massa paartikel $m = 10kg$.
a) Hitung besar dan arah resultante gaya dari ke empat gaya tersebut.
b) Tentukan komponen vektor percepatan yang terjadi
c) Dari soal a dan b, gambar dalam koordinat kartesian

3. Dari gambar dibawah ini, jika diketahui $\overline{F} = 125N$ $m = 15kg$ dan $g = 9{,}8m/s^2$
Bila koefisien gesek kinetis benda terhadap lantai $\mu_K = 0{,}5$ Massa tali dan katrol diabaikan dan tidak ada gesekan pada katrol.
Hitung percepatan benda dalam sistem tersebut



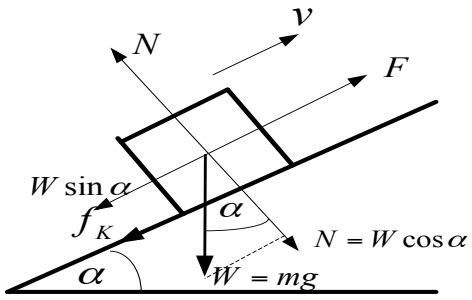
4. Dari gambar dibawah ini, jika diketahui $m_1 = 10kg$ dan $m_2 = 8kg$ permukaan horisontal licin sempurna (tidak ada gaya gesek)



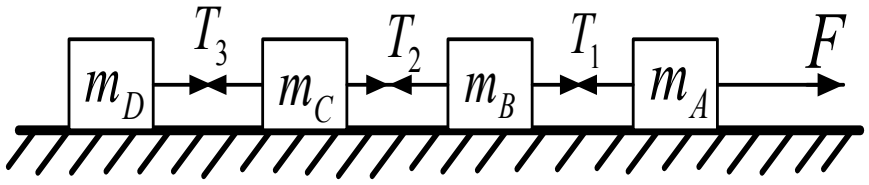
a) Hitung percepatan balok-balok dalam sistem
b) Hitung tegangan tali tersebut

5. Suatu benda bermassa $m = 7{,}5kg$ berada pada bidang datar. Sebuah gaya $\overline{F} = 100N$ berusaha menarik benda dan gaya membentuk sudut $\theta = 60^o$ terhadap horisontal dengan percepatan $\overline{a} = 2{,}75m/s^2$, bila percepatan gravitasi $g = 9{,}8m/s^2$ **Berapa** koefisien gesek kinetis benda terhadap lantai (μ_K).

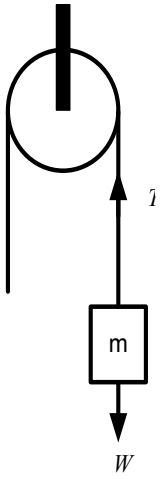
6. Dari gambar dibawah ini, jika diketahui $\overline{F} = 90N$, $\alpha = 45^o$, $\overline{a} = 5m/s^2$ dan $g = 9{,}8m/s^2$ Bila koefisien gesek kinetis benda terhadap lantai $\mu_K = 0{,}5$
a) Hitung massa balok tersebut
b) Gaya gesek yang terjadi



7. Benda A,B,C dan D saling terangkai seperti pada gambar di bawah ini mempunyai massa 18 kg, 15 kg, dan 10 kg dan 7 kg. suatu gaya F dikerjakan pada benda A. lantai licin sempurna dengan percepatan $\overline{a} = 2{,}5m/s^2$.
a) Tentukan gaya F yang dialami sistem
b) Tegangan tali masing-masing



8. Dari gambar dibawah ini, jika diketahui $W = 3N$ dan $g = 9{,}8m/s$, katrol tanpa gesekan.
Hitung percepatan benda, jika gaya tengangan tali (T)

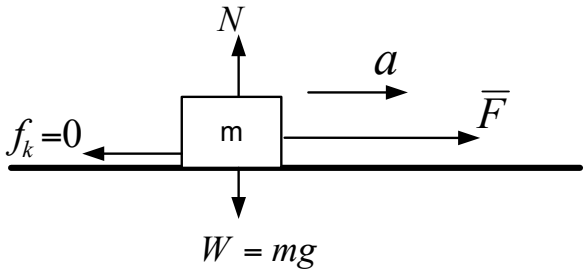


a) $T = 4N$
b) $T = 3N$
c) $T = 2N$

9. Dari gambar dibawah ini, jika diketahui balok bila mula-mula diam dengan massa $m = 15kg$ dan gaya $\overline{F} = 30N$

Hitung :

a) Percepatan yang timbul dalam system
b) Jarak yang ditempuh selama 10 detik
c) Kecepatan pada akhir 10 detik



10. Suatu benda bermassa $m = 1{,}6kg$ mula-mula diam, kemudian ditarik dengan gaya sebesar $\overline{F} = 20N$, berada pada bidang miring yang membuat sudut $\alpha = 60^o$ dengan bidang datar. Benda dianggap bergerak beraturan dengan percepatan konstan, koefisien gesekan kinetis dengan bidang $\mu_k = 0{,}2$ dan $g = 10m/s^2$.

Hitung:

a) Gaya gesek yang terjadi pada sistem
b) Jarak yang ditempuh selama 3 detik

BAB IV
USAHA DAN ENERGI

Pada dinamika partikel telah dibicarakan mengenai penyebab gerakan suatu benda, yaitu adanya gaya-gaya yang bekerja pada benda tersebut. Istilah kerja hanya digunakan dalam arti yang khusus, pada setiap kerja selalu terdapat dua hal sekaligus, yaitu adanya gaya dan adanya perpindahan.

4.1 KERJA OLEH GAYA YANG KONSTAN

Bila pada sebuah benda bekerja sebuah gaya F yang konstan dan benda tersebut bergerak lurus dalam arah gaya, maka kerja yang dilakukan oleh gaya terhadap benda dapat didefinisikan sebagai perkalian besarnya gaya F dengan jarak d yang ditempuh oleh benda selama gerakan. Secara matematis dapat di tulis sebagai

$$W = F\ d \quad \text{..... (4.1)}$$

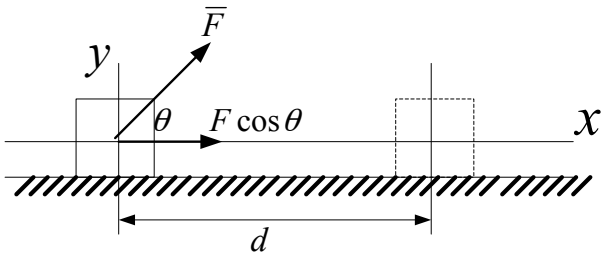
Dengan $W = usaha\ (joule)$

$F = gaya\ (newton)$

$d = jarak\ (meter)$

Jika gaya konstan yang berkerja pada benda tidak searah dengan arah gerak benda, kerja yang dilakukan terhadap benda merupakan perkalian komponen gaya ke arah gerak benda dengan jarak d yang ditempuh oleh benda, atau dituliskan sebagai

$$W = (F\cos\theta).d \quad \text{..... (4.2)}$$



Gambar 4.1 Balok yang ditarik dengan gaya F

Bila $\theta = 90^o$, gaya tidak mempunyai komponen ke arah gerak partikel, sehingga dalam kondisi seperti ini tidak ada kerja yang dilakukan selama gerakan.

Contoh 4.1

Sebuah balok bermassa $m = 30\ kg$ ditarik gaya $F = 60\ N$ yang membentuk sudut $\theta = 53^o$terhadap horisontal seperti pada Gambar 4.1. Pada saat balok dapat bergeser mendatar sejauh $d = 3\ m$ maka tentukan usaha yang dilakukan gaya tersebut!

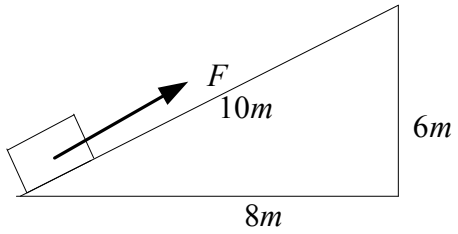
Penyelesaian:

Perhatikan Gambar 4.1 , gaya yang bekerja membentuk sudut θ terhadap perpindahannya, maka usaha yang dilakukan gaya dapat diperoleh seperti berikut.

$W = (F\cos\theta)d = Fd\cos\theta = 60\ 3\ \cos 53^o = 180\ 0.6 = 108\ joule$

Contoh 4.2

Sebuah balok dengan massa 20 kg dinaikkan sepanjang bidang miring dari dasar sampai puncak sejauh 10 meter dan puncak terletak 6 meter dari dasar. Andaikan permukaan tanpa geseran, berapakah kerja yang harus dilakukan oleh gaya paralel dengan bidang miring untuk mendorong balok ke atas dengan kelajuan konstan dan percepatan gravitasi $g = 10m/s^2$?.



Gambar 4.2 Balok yang dinaikkan sepanjang bidang miring

Penyelesaian :

Karena gerakanya adalah beraturan dengan kelanjuan konstan, maka dari diagram gaya gaya diperoleh

$$\sum F = 0 \rightarrow \quad F - mgSin\theta = 0$$

$$F = mgSin\theta = (20Kg)(10m/s^2)(6/10) = 120N$$

Kerja yang dilakukan oleh gaya F adalah

$$W = F.d = (120)(10) = 1200\,joule$$

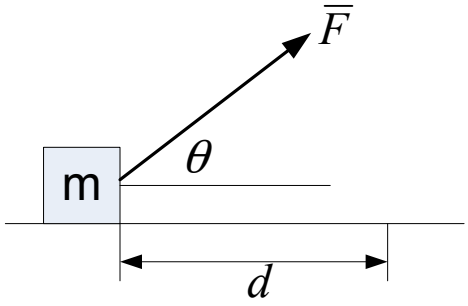
Bila balok diangkat sampai ke puncak tanpa melalui bidang miring, kerja yang dilakukan adalah

$$W = mgh = (20)(10)(6) = 1200\,joule$$

sama besar dengan hasil semula. Perbedaan terletak pada besarnya gaya dan jarak yang ditempuh. Pada bidang miring digunakan gaya yang lebih kecil dibanding tanpa bidang miring untuk mengangkat balok ke atas.

Contoh 4.3

Seorang anak menarik balok yang massanya 25 kg sejauh 50 meter sepanjang permukaan horizontal dengan kelajuan konstan. Berapakah kerja yang ia lakukan terhadap balok bila koefisien gesekan kinetis $\mu_k = 0{,}3$ dan ia menarik balok dengan sudut $\theta = 37^o$ terhadap bidang horizontal dan percepatan gravitasi $g = 10m/s^2$?.



Gambar 4.3 Seorang anak menarik balok

Penyelesaian :

Dari diagaram gaya-gaya, F gaya tarik dari anak, W berat dari balok, f_k gaya gesekan, N gaya normal dari bidang horizontal terhadap balok. Balok bergerak dengan kelanjutan konstan, dari hukum kedua Newton diperoleh

$$F_x = 0 \qquad \text{dan} \qquad F_y = 0$$

$$F\cos\theta - f_k = 0 \qquad FSin\theta + N - W = 0$$

Kita tahu bahwa antara f_k dan N dihubungkan dengan

$$f_k = \mu_k N$$

Dari kedua persamaan di atas terdapat 2 besaran yang tidak diketahui. Untuk mencari F kita eliminasi f_k dan N dari 3 persamaan di atas dan diperoleh :

$$F\cos\theta - \mu_k(W - F\sin\theta) = 0 \rightarrow F\cos\theta - \mu_k W + \mu_k F\sin\theta = 0$$

$$F(\cos\theta + \mu_k \sin\theta) = \mu_k W$$

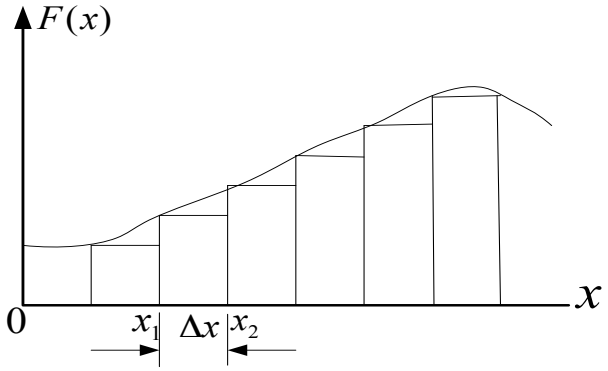
$$F = \frac{\mu_k W}{\cos\theta + \mu_k \sin\theta} = \frac{(0{,}3)(25)(10)}{(0{,}8) + (0{,}3)(0{,}6)} = \frac{75}{0{,}98} = 76{,}5N$$

sedang kerja yang dilakukan oleh anak

$$W = F.d\cos\theta = (76{,}5)(50)(0{,}8) = 3060\,joule$$

4.2 KERJA YANG DILAKUKAN OLEH GAYA YANG BERUBAH

Kerja yang dilakukan oleh gaya tidak konstan, akan ditinjau gaya yang berubah hanya besarya saja. Andaikan gaya berubah terhadap posisi $F(x)$ dan arah gaya searah dengan arah gerak x, maka kerja yang dilakukan oleh gaya berubah ini dari x_1 sampai dengan x_2 dapat di hitung dengan cara sebagai berikut. Pada Gambar 4.4 di bawah ini ditinjaukkan grafik gaya (F) sebagai fungsi posisi (x).



Gambar 4.4 Grafik gaya (F) sebagai fungsi posisi (x) .

Dengan membagi pergeserkan x menjadi sejumlah interval kecil yang sama Δx , maka gaya F selama pergeseran yang kecil (Δx) dari x_1 sampai dengan $x_1 + \Delta x_1$ hampir menpunyai harga yang konstan dan kerja yang dilakukan adalah

$$\Delta W_1 = F_1\ \Delta x_1 \qquad (4.3)$$

Dengan F adalah besarnya gaya pada Δx_1. Begitu pula pada pergeseran kecil dari $x_1 + \Delta x_1$ hingga $x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2$ gaya F hampir konstan dan kerja yang dilakukan

$$\Delta W_2 = F_2\ \Delta x_2 \qquad (4.4)$$

dengan F adalah gaya pada $x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2$. Sehingga secara keseluruhan kerja total (W) yang dilakukan F selama pergeseran dari x_1 hingga x_2 merupakan jumlahan dari masing masing kerja dalam interval Δx_i, sehingga dapat di tuliskan

$$W_{total} = \Delta W_1 + \Delta W_2 + ... = \sum_{i=1}^{N} F_i \Delta x_i \quad \text{..... (4.5)}$$

dengan N = jumlah interval

Pendekatan yang lebih baik dapat diperoleh dengan membagi pergeseran dari x_1 dan x_2 menjadi interval yang jumlahnya lebih banyak atau Δx_i semakin kecil dan harga F pada permulaan interval adalah harha yang sungguh sungguh mewakili interval tersebut. Perdekatan ini akan lebih baik bila interval Δx_i mendekati nol dan jumlah interval banyaknya tak terhingga, atau

$$W = \lim \sum_{i=1}^{N} F_i \ \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F \ dx \text{..... (4.6)}$$

Contoh 4.4.

Sebuah gaya berubah terhadap posisi $F(x) = 10 \ x$ dalam Newton dan x dalam meter. Jika gaya mengalami perubahan posisi sebesar $x = 5m$

Ditanyakan :

a. Gaya
b. Kerja

Penyelesaian:

a. $F(x) = 10 \ 5 = 50 Newton$

b. Karena $F(x) = 10 \ x$ maka $W = \int_0^5 10 \ x \ dx = 5 \ x^2 = 5 \ 5^2 = 125 joule$

4.3 ENERGI KINETIK

Keadaan sederhana diandaikan resultan gaya F konstan baik besar maupun arah. Gaya ini bekerja pada partikel dengan massa m, akan menghasilkan perpecahan yang kostan a. Bila kecepatan dari partikel itu v, maka energi kinetiknya adalah

$$E_k = \frac{1}{2} \ m \ v^2 \text{ ..... (4.7)}$$

Satuan dari energi kinetik dan kerja adalah sama. Energi kinetik, seperti halnya kerja, adalah besaran skalar. Energi kinetik dari sekumpulan partikel adalah penjumlahan (skalar) dari energi kinetik masing masing partikel pada kumpulan tersebut.

Contoh 4.5

Sebuah sepada motor mempunyai berat $W = 1500 Newton$ bergerak dengan kecepatan $v_1 = 30 m/dt$ dengan percepatan gravitasi $g = 10 m/s^2$

Ditanyakan

a. Energi kinetik untuk $v = v_1$
b. Energi kinetik untuk $v = 2v_1$

Penyelesaian :

a. $W = m\ g = m\ 10 = 1500 \rightarrow m = 1500/10 = 150 kg$

$$E_k = \frac{1}{2} m\ v^2 = \frac{1}{2} 150\ (30)^2 = 75(30)^2 = 67500\ joule$$

b. $E_k = \frac{1}{2} m\ v^2 = \frac{1}{2} 150\ (2.30)^2 = 75\ (60)^2 = 270000\ joule$

4.4 ENERGI POTENSIAL

Partikel bergerak sepanjang garis lurus. Kerja yang dilakukan oleh resultan gaya F pada perpindahan benda adalah sama dengan energi kinetik yang diperoleh benda tersebut, atau

$$\int_{x_0}^{x_1} F\ dx = \frac{1}{2} m\ v^2 - \frac{1}{2} m\ v_0^2 \quad \text{.....(4.8)}$$

Berkurangnya energi kinetik berkaitan dengan bertambahnya energi potensial. Andaikan simbul Ep menyatakan energi potensial, terdapat hubungan

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

Menyatakan bahwa perubahan dari energi kinetik berhubungan dengan perubahan energi potensial yang tandanya berlawanan. Dari teorima kerja-energi :

$\Delta E_k = \int_{x_0}^{x} F(x)\ dx$ sehingga $\Delta E_k = -\int_{x_0}^{x} F(x)\ dx$

$$E_p(x) - E_p(x_0) = \int_{h}^{0} F\ dy = \int_{h}^{0} F(x)\ dx \quad \text{..... (4.9)}$$

Dengan persamaan ini, maka energi potensial yang dimiliki oleh suatu benda karena adanya gaya gravitasi dapat dirumuskan. Dengan mengambil posisi benda di atas permukaan bumi adalah h dan gravitasi ke arah h negatif, sehingga $F = -m\ g$ Besarnya energi potensial gravitasi

$$E_p(y) - E_p(0) = \int_{h}^{0} F\ dy = \int_{h}^{0} (-m\ g) dy = m\ g\ h \qquad (4.10)$$

Energi potensial gravitasi sama dengan nol pada $y = 0$ atau $E_p(0) = 0$ sehingga pada $y = h$ besarnya energi potensial adalah $E_p(h) = m\ g\ h$

Contoh 4.6

Berapa energi potensial elevator yang berada di puncak bangunan setinggi 300 meter dari bumi, jika berat elevator $W = 400 Newton$

Penyelesaian :

$E_p = m\ g\ h = W\ h = 400.300 = 120000\ joule$

4.5 HUKUM KEKEKALAN ENERGI MEKANIKA

Dari persamaan 4.7 dan persamaan 4.10 Bila dikombinasikan akan diperoleh

$$E_p(x) - E_p(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\ dx = \frac{1}{2} m\ v_0^2 - \frac{1}{2} m\ v^2$$

atau $$E_p(x) - E_p(x_0) = \frac{1}{2} m\ v_0^2 - \frac{1}{2} m\ v^2 \quad \text{..... (4.11)}$$

Perhatian bahwa gaya yang percepatan telah direliminasi pada persamaan ini. Persamaan sebelah kanan hanya tergantung pada posisi awal x_0 dan kelajuan awal v_0, yang berharga tertentu, sehingga konstan selama gerakan keduanya berhubungan dengan E_p dan E_k yang berharga konstan dan disebut energi mekanik total (E). Sehingga diperoleh hokum kekekalan energi dengan persamaan

$$\frac{1}{2} m\ v^2 + E_p(x) = E \quad \text{..... (4.12)}$$

Bila benda bergerak dari ketinggian h_1 ke keitnggian h_2 diperoleh persamaan

$$\frac{1}{2} m\ v_1^2 + m\ g\ h_1 = \frac{1}{2} m\ v_2^2 + m\ g\ h_2 \quad \text{..... (4.13)}$$

Atau $$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \quad \text{..... (4.14)}$$

Atau energi mekanik E adalah konstan dan kekal sepanjang gerakan , meskipun energi kinetik dan energi potensial berubah uabah selama gerakan.

Contoh 4.7

Sebuah bola bermassa $m = 0{,}2kg$ dilemparkan ke atas dengan kecepatan awal $v_1 = 10m/s$ dari ketinggian $h_1 = 1{,}5m$. Percepatan gravitasi $g = 10m/s^2$. Berapakah ketinggian bola pada saat kecepatannya $v_2 = 5m/s$?

Penyelesaian:

Ketinggian h_2 dapat ditentukan dengan hukum kekekalan energi mekanik seperti berikut.

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2} m\ v_1^2 + m\ g\ h_1 = \frac{1}{2} m\ v_2^2 + m\ g\ h_2$$

$$\frac{1}{2}\ v_1^2 + g\ h_1 = \frac{1}{2}\ v_2^2 + g\ h_2$$

$$\frac{1}{2}(10)^2 + (10)\ (1{,}5) = \frac{1}{2}(5)^2 + (10)\ h_2$$

$$h_2 = \frac{65 - 12{,}5}{10} = \frac{52{,}5}{10} = 5{,}25m$$

4.6 PUSAT MASSA

Perhatikan sebuah sistem yang sederhana terdiri dari 2 partikel m_1 dan m_2 pada jarak x_1 dan x_2 dari pusat koordinat O. Bila diletakkan sebuah titik C, disebut pusat massa dari sistem, sejarak x dari pusat koordinat O, dengan x didefinisikan

$$\bar{x}_{pm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad \text{..... (4.15)}$$

Bila terdapat n partikel m_1, m_2….., m_n sepanjang garis lurus, maka pusat massa dari partikel partikel terhadap pusat sumbu adalah

$$\bar{x}_{pm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{..... (4.16)}$$

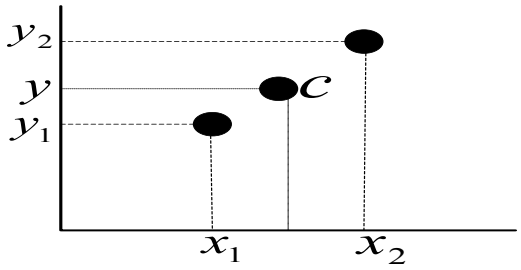
dengan x_1, x_2 ….., x_n adalah jarak dari massa ke pusat koordinat

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M \quad \text{..... (4.17)}$$

adalah massa total dari sistem, sehingga

$$M\ \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad \text{..... (4.18)}$$

Perhatian partikel yang tidak terletak pada satu garis lurus, tapi betada pada satu bidang seperti terlukis pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Dua partilek yang terletak pada satu bidang

Pusat massa dua partikel terletak pada titik C dengan koordinat x dan y dengan

$$\bar{x}_{pm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} \text{ dan } \bar{y}_{pm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} \quad \text{..... (4.19)}$$

dengan x_i, y_i adalah koordinat dari massa m_i koordinat pusat massa x, y diukur dari pusat koordinat O. Untuk sejumlah partikel yang terletak pada sebuah bidang, pusat massanya x, y, z ditentukan

$$\bar{x}_{pm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},\ \bar{y}_{pm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \text{ dan } \bar{z}_{pm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \quad \text{..... (4.20)}$$

Sebuah benda tegar, semacam batang mistar, dapar dibayangkan sebagai sebuah sistem yang terdiri dari paket partikel yang kontinyu. Jumlah dari partikel (atom, molekul) dari benda begitu banyak dan ruang diantaranya begitu kecil. Untuk memperoleh peryataan bagi pusat massa suatu benda kontinyu, dimana dengan membagi benda menjadi elemen kecil sejumlah n dengan massa m_i yang terletak pada suatu titik x_i , y_i , z_i . Koordinat dari pusat massa dinyatakan dengan

$$\bar{x}_{pm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} \;,\; \bar{y}_{pm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} \text{ dan } \bar{z}_{pm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} \quad \text{..... (4.21)}$$

Sekarang massa dari elemen tadi dibagi lebih banyak lagi dari n menjadi tak terhingga Koordinat dari pusat massa dinyatakan dengan

$$\bar{x}_{pm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \;,$$

$$\bar{y}_{pm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad \text{..... (4.22)}$$

$$\bar{z}_{pm} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i} = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

Bila vector $\bar{r}$ adalah yang menyatakan jarak dari pusat sumbu sampai denga elemen massa dm, maka vector pusat massa R terletak

$$\bar{R} = \frac{\int \bar{r}\, dm}{\int dm} \quad \text{..... (4.23)}$$

Sering terjadi benda homogen yang mempunyai simetri titik, garis, atau bidang ini. Misalkan pusat massa dari bola homogen (yang mempunyai sebuah simetri titik) akan terletak pada pusat bola, pusat massa dari sebuah kerucut (yang mempunyai sebuah simetri garis) akan terlatak pada sumbu kerucut.

Contoh 4.8

Carilah koordinat pusat massa dari 3 partikel dengan massa $m_1 = 3kg$, $m_2 = 2kg$, dan $m_1 = 4kg$ masing-masing terletak koordinat x dan y pada (1, 1), (3, 4) dan (2, 5)

Penyelesaian:

$$\bar{x}_{pm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(3)(1) + (2)(3) + (4)(2)}{3 + 2 + 4} = \frac{17}{9} = 1{,}88$$

$$\bar{y}_{pm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(3)(1) + (2)(4) + (4)(5)}{3 + 2 + 4} = \frac{31}{9} = 3{,}44$$

Jadi koordinat pusat massa adalah (1,88; 3,44)

4.7 GERAKAN PUSAT MASSA

Perhatikan gerakan dari sekelompok pertikel dengan massa m_1 , m_2 , …. , m_n danmassa total M. Dari persamaan pusat massa diperoleh

$$M\ \bar{x}_{pm} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + ... + m_nx_n \qquad (4.24)$$

dengan $\bar{x}_{pm}$ adalah koordinat pusat massa. Diferensiasi persamaan di atas terhadap waktu, diperoleh

$$M\ \frac{dx}{dt} = m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt} + m_3\frac{dx_3}{dt} + ... + m_n\frac{dx_n}{dt}$$

$$M\ v_x = m_1v_{x1} + m_2v_{x2} + m_3v_{x3} + ... + m_nv_{xn} \quad ..... (4.25)$$

$$M\ \frac{d^2x}{dt^2} = m_1\frac{dv_{x1}}{dt} + m_2\frac{dv_{x2}}{dt} + m_3\frac{dv_{x3}}{dt} + ... + m_n\frac{dv_{xn}}{dt}$$

$$M\ a_x = m_1a_{x1} + m_2a_{x2} + m_3a_{x3} + ... + m_na_{xn} \quad ..... (4.26)$$

Bila F_{xi} dalah resultan gaya yang bekerja pada partikel m_i, persamaan di atas dapat dituliskan

$$M\ a_x = F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + ... + F_{xn} \quad ..... (4.27)$$

Dengan a_x adalah komponen percepatan pusat massa ke arah sumbu x dari pusat massa.persamaan yang mirip berlaku untuk kompomen y dan z

Tiga persamaan percepatan kearas x, y, z dapat digabungkan menjadi 1 persamaan vektor

$$M\ \bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + ... + \bar{F}_n \quad ..... (4.28)$$

Dari persamaan ini, massa total dari sekelompok partikel dikalikan dengan percepatan pusat massa sama dengan penjumlahan vektor dari gaya gaya yang bekerja pada kelompok partikel tersebut.

Contoh 4.9

Terdapat 3 partikel dengan massa berbeda $m_1 = 5kg$, $m_2 = 6kg$ dan $m_3 = 3kg$ masing-masing terletak koordinat x dan y pada (5; 2), (-1; 4) dan (-3; 3) dikenai gaya luar sebesar $\bar{F}_1 = 20Newton$ arah ke atas, $\bar{F}_2 = 10Newton$ arah ke kiri dan $\bar{F}_3 = 15Newton$ arah ke kanan. Carilah percepatan pusat massa dari sistem ini

Penyelesaian:

Pertama tama dicari koordinat pusat massa

$$\bar{x}_{pm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(5)(5) + (6)(-1) + (3)(-3)}{5 + 6 + 3} = \frac{10}{14} = 0{,}71$$

$$\bar{y}_{pm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(5)(2) + (6)(4) + (3)(3)}{5 + 6 + 3} = \frac{43}{14} = 3{,}07$$

Komponen gaya luar ke arah sumbu x dan y adalah

$F_x = 15 - 10 = 5Newton$

$F_y = 20Newton$

Maka resultan gaya luar adalah

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5)^2 + (20)^2} = \sqrt{425} = 20{,}6 Newton$$

Dan membentuk sudut θ dengan sumbu x dengan

$$tg\theta = \frac{20}{5} = 4 \text{ atau } \theta = arctg(4) = 76^o$$

Maka percepatan pusat massa adalah

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{M} = \frac{20{,}6}{14} = 1{,}47 m/s^2$$

4.8 MOMENTUM LINIER DARI PARTIKEL

Momentum dari sebuah partikel adalah vektor $\bar{p}$ yang didefinisikan sebagai perkalian antara massa m dan kecepatan v

$$\bar{p} = m\ \bar{v} \quad \text{..... (4.29)}$$

Dari hukum kedua Newton diperoleh

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \quad \text{..... (4.30)}$$

Bila massa dari benda tetep, maka

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\ \bar{v}) = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\ \bar{a} \quad \text{..... (4.31)}$$

Jika terdapat sistem dengan n partikel yang bergerak, dengan massa $m_1,\ m_2,\ m_3,....,m_n$ maka massa total dari sistem adalah

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n \quad \text{..... (4.32)}$$

Setiap partikel akan mempunyai kecepatan dan momentum.
Sistem keseluruhan akan memiliki momentum total P yang merupakan penjumlahan vektor dari momentum masing masing partikel. Dapat dituliskan

$$p = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + ... + \bar{p}_n \quad \text{..... (4.33)}$$

Bila persamaan ini diferensialkan waktu, diperoleh

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}_1 + \vec{F}_2 + \bar{F}_3 + ... + \bar{F}_n \quad \text{..... (4.34)}$$

Contoh 4.10

Lihat gambar di bawah, jika diketahui $m_1 = 3kg,\ v_1 = 4m/s$ arah ke kanan dan $m_2 = 8kg,\ v_2 = 1{,}5m/s$ arah ke kiri

Ditanyakan: kecepatan (v)jika kedua balok sesudah tumbukan tetap melekat satu sama lain.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan hukum kekekalan momentum

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v + m_2 v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(3)(4) + (8)(-1{,}5)}{3 + 8} = 0 \rightarrow v = 0$$

4.9 IMPULS DAN MOMENTUM

Pada peristiwa tumbukan, gaya yang besar akan bekerja pada partikel yang bertumbuhkan untuk waktu yang pendek. Salah satu contoh spesifik adalah pada saat raket memukul bola tennis atau partikel inti menumbuk partikel lain. Selama waktu yang pendek, raket bersentuhan dengan bola, gaya yang besar akan bekerja pada bola. Gaya ini berubah terhadap waktu dalam bentuk yang komplek yang yang sukar ditentukan fungsinya. Baik bola maupun raket berubah bentuk selama tumbukan. Gaya semacam ini disebut gaya impulsive.

Dari hubungan antara gaya dan momentum sebuah benda dalam waktu dt diperoleh :

$$d\bar{p} = \bar{F}\ dt \quad \text{..... (4.35)}$$

Selama tumbukan perubahan momentum dapat diperoleh dengan mengintegralkan persamaan dalam kurun waktu selama terjadi tumbukan yaitu,

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \int_1^2 dp = \int_1^2 \bar{F}\ dt \quad \text{..... (4.36)}$$

Integral dari gaya dalam kurun waktu selama gaya bekerja disebut impuls dari gaya terjadi . baik impuls maupun momentum keduanya adalah besaran vektor dan mempunyai dimensi dan satuan yang sama.

Perubahan momentum dari partikel 1 hasil dari tumbuhkan adalah

$$\Delta\bar{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_1 dt = \bar{F}_{1\ rata^2} \Delta t \quad \text{..... (4.37)}$$

Dengan $\bar{F}_{1\ rata^2}$ adalah harga rata- rata dari *gaya* $\bar{F}_1$ dalam kurun waktu

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{..... (4.38)}$$

Perubahan momentum dari partikel 2 selama tumbukan berlangsung adalah

$$\Delta\bar{p}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_2 dt = \bar{F}_{2\ rata^2} \Delta t \quad \text{..... (4.39)}$$

Bila tidak ada gaya lain yang bekerja pada partikel ini, maka $\Delta\bar{p}_1$ dan $\Delta\bar{p}_2$ memberikan perubahan momentum total untuk masing-masing partikel. Pada setiap saat $\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$ sehingga

$$\Delta\bar{p}_1 = -\Delta\bar{p}_2 \quad \text{..... (4.40)}$$

Bila ditinjau 2 partikel yang menyusun sebuah sistem, maka momentum total dari sistem adalah

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 \quad \text{..... (4.41)}$$

Dan perubahan momentum total dari sistem sebagai hasil dari tumbuhan adalah nol, yaitu

$$\Delta\bar{p} = \Delta\bar{p}_1 + \Delta\bar{p}_2 = 0 \quad \text{..... (4.42)}$$

Jadi, dalam keadaan gaya luar tidak ada, momentum total dari sistem adalah konstan. Gaya impulsive yang bekerja selama tumbukan adalah gaya dalam yang tidak berpengaruh terhadap momentum total dari sistem.

Latihan Soal:

1. Sebuah gaya konstan 50 N bekerja pada suatu benda hingga benda berpindah sejauh 10 m. **Hitunglah** usaha yang dilakukan gaya tersebut bila sudut antara gaya dan perpindahan 30°, 60°, dan 90°!

2. Balok bermassa 150 kg yang terletak pada papan miring 30° ditarik dengan gaya 200 N. Jika panjang papan 7 m, $(g = 10m/s^2)$, dan koefisien geseknya 0,2; maka **hitunglah** usaha yang dilakukan gaya tersebut sepanjang bidang miring!

3. Sebuah benda dengan massa 2 kg bergerak dengan kecepatan awal 20 m/s, kemudian dipercepat dengan percepatan 4 m/s^2. **Hitunglah** kecepatan benda setelah 10 s dan energi kinetiknya!

4. Sebuah bola terletak pada ketinggian 20 m dari tanah $(g = 10m/s^2)$. **Hitunglah** kecepatan bola pada ketinggian 10 m jika bola jatuh bebas dan jika bola diberi kecepatan awal 5 m/s !

5. Sebuah benda bermassa 10 kg bergerak dalam suatu garis lurus mendatar dengan kelajuan tetap 8 m/s. Sebuah gaya sebesar 40 N dikerjakan pada benda searah dengan arah gerak benda dan dilepas setelah benda tersebut menempuh jarak 5 m.

a) Berapakah kecepatan benda pada saat gaya dilepaskan?
b) Hitunglah pertambahan energi kinetik akibat gaya tersebut!

6. Sebuah bola dengan massa 2 kg digantung dengan tali sepanjang 1 m. Benda tersebut dipukul sehingga berayun dengan kecepatan 4 m/s. **Hitunglah** tinggi maksimum bola! $((g = 10m/s^2)$

7. Sebuah bola bermassa 1 kg disundul seorang pemain sepak bola, sehingga bola terpental ke atas dan 10 detik kemudian bola jatuh ke tanah. Bila percepatan $(g = 10m/s^2)$, maka **hitunglah** energi kinetik bola saat menyentuh tanah!

8. Seorang pekerja diduga mengalami gangguan jiwa, sehingga menerjunkan diri dari gedung tingkat tiga yang mempunyai ketinggian 25 m. $(g = 10m/s^2)$.

a. Menurut fisika, benarkah berlaku hukum kekekalan energi pada orang tersebut?
b. Bila massa orang tersebut 50 kg, berapa kecepatan orang tersebut saat mencapai tanah!
d. Apakah perbuatan tersebut benar menurut Anda? Berikan alasannya!

9. Terdapat 4 partikel dengan massa yang berbeda dikenai gaya luar pada sumbu X dan Y seperti dibawah ini :

$m_1 = 5kg$ dengan koordinat (4, 2) dan gaya F = 20 Newton arah ke atas

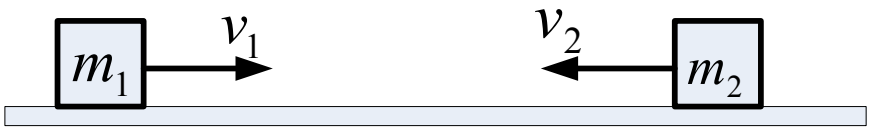
$m_2 = 4kg$ dengan koordinat (-5, 3) dan gaya F = 10 Newton arah ke kiri

$m_3 = 3kg$ dengan koordinat (-4, -1) dan gaya F = 8 Newton arah ke bawah

$m_4 = 6kg$ dengan koordinat (3, -2) dan gaya F = 15 Newton arah ke kanan

Hitung : a) Pusat massa
b) Resultante gaya dan sudutnya **serta gambarlah**
c) Percepatan pusat massa

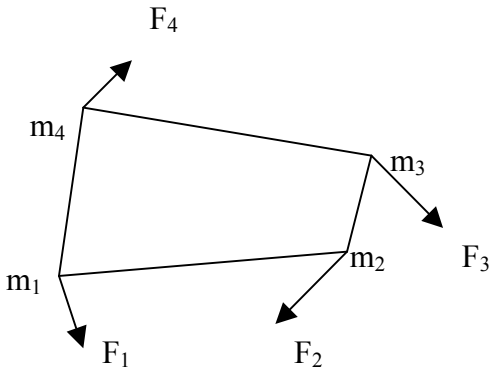
10. Lihat gambar dibawah, Jika diketahui dua balok dengan massa masing-masing $m_1 = 300gr$, $v_1 = 50cm/s$ arah ke kanan dan $m_2 = 200gr$, $v_2 = 100cm/s$ arah ke kiri
Ditanyakan: kecepatan (v) jika kedua balok sesudah tumbukan tetap melekat satu sama lain.



.

BAB V
DINAMIKA ROTASI

Pada pembahasan gerakan benda dalam kinematika maupun dinamika, perlu dianggap bahwa benda tersebut merupakan titik materi atau partikel, sehingga gerakan rotasi suatu benda yang sedang melakukan gerakan translasi diabaikan. Sebelum membahas benda kaku lebih jauh, pandang dulu suatu sistem partikel banyak yang dihubungkan dengan batang-batang kaku tak bermasa, (gb. 5-1). Dalam benda tegar, jarak antara massa-massa partikel dengan pusat massa selalu tetap.



Gambar 5.1 Sistem partikel banyak yang membentukbenda tegar,masing-masing partikel dipengaruhi oleh gaya sebarang

Apabila sistem benda tegar ini dipengaruhi oleh gaya- gaya yang berkerja pada partikel-partikel (tidak pada titik pusat massa), maka akan terjadi dua kemungkinan :

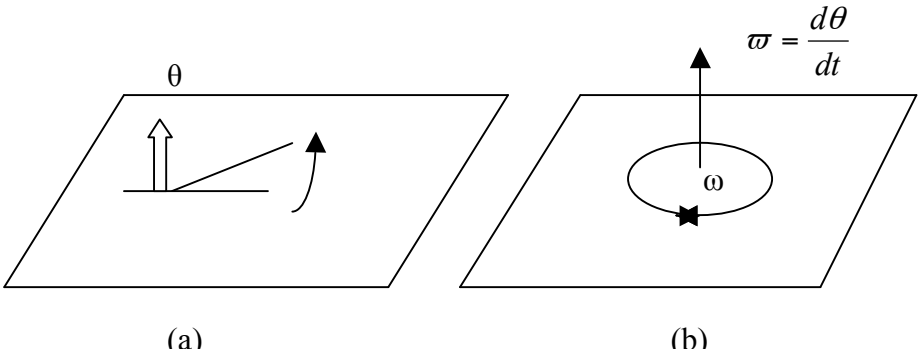
A. Apabila $\sum \vec{F} = 0$, maka titik pusat massa akan diam atau bergerak lurus beraturan, namun benda tegar melakukan geralan rotasi terhadap pusat massa.

B. Apabila $\sum \vec{F} \neq 0$, maka titik pusat massa akan bergerak dengan percepatan, dan benda tegar juga akan melakukan gerakan rotasi jadi benda tegar akan melakukan gerakan campuran.

Dalam pembahasan di atas, ditinjau benda tegar yang tersusun dari partikel-partikel yang diskrit (terpisah), sehingga sistem diatas disebut sistem diskrit. Apa bila benda tegar tersusun dari partikel yang banyak sekali, sehingga partikel-partikel memenuhi suatu ruang, maka sistem ini di sebut sistem kontinu atau di sebut benda pejal.

5.1 PERNYATAAN VEKTOR DALAM GERAK ROTASI

Dalam membahas gerak rotasi, besaran pergeseran sudut, kecepatan sudut dan percepatan sudut selalu dinyatakan dalam bentuk vektor, masing-masing dilambangkan dengan θ , ω dan α . Pergeseran sudut, kecepatan sudut adalah positif bila gerak rotasi (melingkar, atau berputar) berlawanan dengan putaran jarum jam, sedangkan arah vektornya (seperti ditunjukan dalam Gambar 5.2) sejajar dengan sumbu rotasi (sumbu putar) yaitu arah maju sekrup putar kanan.



Gambar 5.2 (a) arah $\bar{\theta}$ tegak lurus bidang
(b) arah $\bar{\omega}$ sejajar dengan sumbu putar

dari definisi kecepatan sudut, arah kecepatan sudut daerah dengan pergeseran sudut atau searah dengan sumbu putar, yaitu

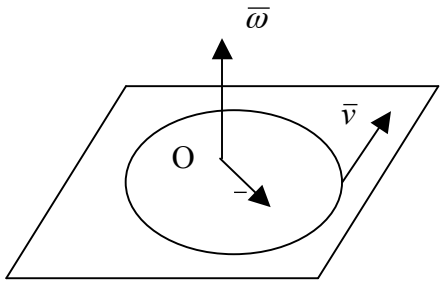
$$\bar{\omega} = \lim_{t \to o} = \frac{\Delta \bar{\theta}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\theta}}{dt} \quad \text{..... (5.1)}$$

sedangkan percepatan sudut $\bar{\alpha}$ sebagai

$$\bar{\alpha} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad \text{..... (5.2)}$$

tampak bahwa $\bar{\alpha}$ disamping bergantung pada perubahan arah $\bar{\omega}$ (kalau sumbu putar arahnya berubah) juga bergantung pada perubahan besar $\bar{\omega}$.

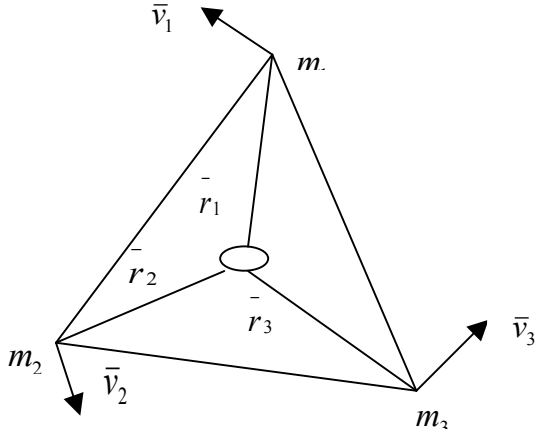
Dalam gerak melingkar yang jari–jarinya r dan kecepatan sudutnya $\bar{\omega}$, besar kecepatan linier benda $v = \omega r$, sedang arahnya sama dengan arah garis singgung pada lingkaran di titik dimana benda berada. Kecepatan linier benda dinyatakan sebagai $\bar{v} = \vec{\omega} \; x \; \bar{r}$, yang menunjukan bahwa arah $\bar{v}$, yang menunjukan bahwa arah $\bar{v}$ tegak lurus baik tehadap $\bar{\omega}$ maupun $\bar{r}$, yaitu sarah dengan arah maju sekrup bila diputar dari $\bar{\omega}$ ke $\bar{r}$ seperti ditunjukan dalam gambar 5.3.



Gambar 5.3 benda terletak pada posisi $\bar{r}$ bergerak melingkar dengan kecepatan sudut $\bar{\omega}$

5.2 MOMENTUM SUDUT DAN MOMEN GAYA

Tinjau sistem 3 partikel yang membentuk benda tegar dalam gambar 5.4 yang akan diamati gerak rotasinya, dalam hal ini titik pusat massa dipakai sebagai titik acuan.



Gambar 5.4 Sistem 3 partikel yang membentuk benda tegar dengan besar kecepatan linier masing-masing v_i

Jika benda tegar berputar terhadap sumbu yang tegak lurus bidang gambar dan melalui O (pusat masa) dengan kecepatan sudut $\bar{\omega}$, maka kecepatan linier partikel ke i adalah

$$\bar{v} = \bar{\omega} \; x \; \bar{r}_i \quad \text{..... (5.3)}$$

Oleh karena bergerak dengan kecepatan v_i, momentum linier yang dimiliki oleh tiap partikel $\bar{p}_i = m_i \; v_i$, Pada gerak rotasi selalu didefinisikan momentum sudut, yaitu besaran vektor hasil perkalian silang antara $\bar{r}$ dengan p_i, sehingga momentum yang dimiliki tiap partikel adalah

$$\bar{L}_i = \bar{r}_i \; x \; p_i = m_i \; r_i \; x \; v_i \quad \text{..... (5.4)}$$

Dari hukum ke dua Newton untuk massa yang konstan dapat ditulis.

$$\bar{F}_i = m_i \; \bar{a}_i = \frac{d\bar{p}_i}{dt} \quad \text{..... (5.5)}$$

Jika kedua ruas persamaan (5.5) ini dikalikan secara silang dengan $\bar{r}_i$, diperoleh

$$\bar{r}_i \; x \; \bar{F}_i = \bar{r}_i \; x \; \frac{d\bar{p}_i}{dt} \quad \text{..... (5.6)}$$

Sedangkan ruas kanan persamaan (5.6) dapat ditulis

$$\bar{r}_i \; x \; \frac{d\bar{p}_i}{dt} = \bar{r}_i \; x \; \frac{d\bar{p}_i}{dt} + \bar{v}_i \; x \; (m_i \; \bar{v}_i)$$

Suku kedua pada ruas kanan yang sengaja ditambahkan itu secara matematis tidak mengubah arti karena $\bar{v}_i \; x \; \bar{v}_i = 0$, tetapi secara fisis (seperti ditunjukkan dalam perumusan selanjutnya) amat bermanfaat. Karena $\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt}$, maka

$$\bar{r}_i \; x \; \frac{d\bar{p}_i}{dt} = \bar{r}_i \; x \; \frac{d\bar{p}_i}{dt} + \frac{d\bar{r}_i}{dt} x \; \bar{p}_i = \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \; x \; \bar{p}_i) = \frac{d}{dt}\bar{L}_i$$

Jadi persamaan (5.6) dapat ditulis menjadi :

$$\bar{r}_i \; x \; \bar{F}_i = \frac{d}{dt}\bar{L}_i \quad \text{..... (5.7)}$$

Untuk benda tunggal persamaan (5.7) menjadi

$$\bar{r} \; x \; \bar{F} = \frac{d}{dt}\bar{L} \quad \text{..... (5.8)}$$

Besaran $\bar{r} \; x \; \bar{F}$ disebut momen gaya atau torsi yang dinyatakan dengan $\bar{\tau}$. Jadi

$$\bar{\tau} = \bar{r} \; x \; \bar{F} = \frac{d\bar{L}}{dt} \quad \text{..... (5.9)}$$

Selanjutnya $\bar{r}$ disebut lengan gaya. Besar momen gaya adalah $\tau = r \; F \sin\theta$, dengan θ adalah sudut antara $\bar{r}$ dan $\bar{F}$, arahnya sama dengan arah maju sekrup putar kanan bila diputar dari $\bar{r}$ ke $\bar{F}$.

Momentum sudut pada persamaan (5.1) dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian vektor dengan skalar, yaitu bila $\bar{v} = \bar{\omega} \; x \; \bar{r}$ disubtitusikan kedalamnya, yang ditunjukkan dalam peumusan berikut :

` $\bar{L}_i = m_i \; \bar{r} \; x(\bar{\omega} \; x \; \bar{r})$ ..... (5.10)

Atau $\bar{L}_i = m_i[\bar{\omega}(\bar{r}_i.\bar{r}_i) - \bar{r}_i(\bar{r}_i.\bar{\omega})]$

Oleh karena selalu $\bar{r}_i \perp \bar{\omega}$ maka

$$\bar{L}_i = m_i.r_i^2\bar{\omega} \quad \text{..... (5.11)}$$

Momentum sudut total yang dimiliki oleh benda tegar, merupakan jumlahan dari masing-masing momentum sudut partikel pembentuknya, sehingga

$$\bar{L} = m_1r_1^2\bar{\omega} + m_2r_2^2\bar{\omega} + m_3r_3^2\bar{\omega}$$

atau

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{3} m_ir_i^2\bar{\omega} \quad \text{..... (5.12)}$$

Apabila benda tegar tersebut tersusun dari partikel N partikel, maka momentum sudutnya menjadi

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{N} m_ir_i^2\bar{\omega} \quad \text{..... (5.13)}$$

dengan $\bar{r}_i$ adalah jarak partikel ke sumbu putar.

Besaran skalar dalam persamaan (5.13) didefinisikan sebagai besaran momen inersia I, yaitu

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \quad \text{..... (5.14)}$$

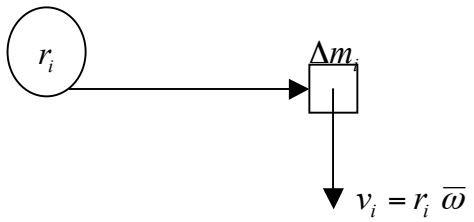
sehingga momentum sudut dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{L} = I\ \bar{\omega} \quad \text{..... (5.15)}$$

5.3 MOMEN INERSIA

Bentuk persamaan (5.15) analog dengan bentuk persamaan momentum linier $\bar{p} = m\ \bar{v}$, sehingga dapat dikatakan bahwa I analog dengan massa dalam gerakan rotasi. Bila suatu benda tegar (seperti pada gambar 5.5) berputar terhadap sumbu yang tegak lurus bidang gambar melalui titik O, dengan memandang bahwa benda tegar tersebut tersusun dari jumlah elemen kecil massa Δm_i , maka momen inersia dalam persamaan (5.14)dapat ditulis sebagai

$$I = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i \quad \text{..... (5.16)}$$



Gambar 5.5 benda tegar dengan distribusi massa kontinu yang berputar terhadap titik O

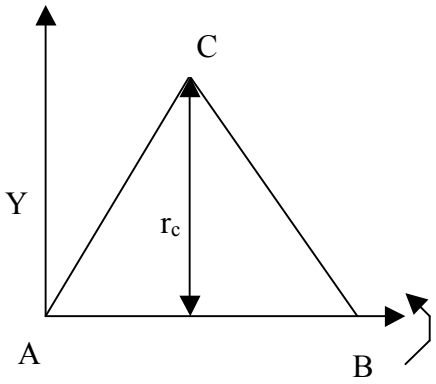
Apabila elemen massa Δm_i diambil sangat kecil $(\Delta m_i \to 0)$, maka bentuk jumlahan dalam persamaan (5.13) dapat diganti dengan bentuk integral,jadi

$$I = \int r^2\ dm$$

Dengan r adalah jarak elemen massa dm ke sumbu putar.

Contoh 5.1

Tiga benda kecil yang massanya masing-masing $m_A = 0{,}5kg, m_B = 0{,}3kg$ dan $m_C = 0{,}4kg$, diletakan berturut – turut pada titik A(0,0)m, B(6,0)m, dan C(3,4)m seperti pada gambar 5.6,dan dihubungkan dengan batang tegar yang massanya dapat diabaikan. Berapakah momen inersial dan momentum sudut sistem ini bila diputar terhadap sumbu x dengan kecepatan sudut $15\,\hat{i}$ rad s^{-1}



Gambar 5.6 Tiga benda kecil diputar tehadap sumbu

Penyelesaian :

Oleh karna ketiga benda terletak Secara diskrit, maka dari persamaan (5.14) $I = m_A r_A^2 + m_B r_B^2 + m_C r_C^2$, Mengingat benda A dan B terletak sepanjang sumbu rotasi maka r_A dan r_B sama dengan nol, sehingga

$I = m_C r_C^2 = (0{,}4)(4)^2 = 6{,}4 kg\ m^2$

Dari persamaan (5.12) momentum sudutnya

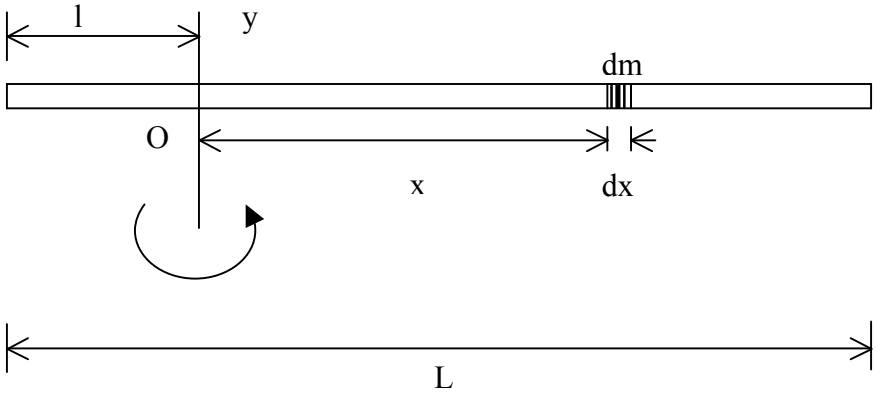
$$\overline{L} = I\ \overline{\omega} = (6{,}4)(15\hat{i}) = 96\hat{i}\ Js$$

Arah momentum sudut $(\overline{L})$searah dengan kecepatan sudut$(\overline{\omega})$,yaitu menuju ke sumbu x positif.

5.3.1 Momen Inersia dari Beberapa Bentuk Sederhana dan Homogen

a. Batang Langsing

Tinjau batang langsing yang panjangnya L dan bermassa M dalam gambar 5.7 yang diputar terhadap sumbu melalui titik O yang terletak di sembarang tempat dalam batang pada jarak / dari salah satu ujungnya.



Gambar 5.7 Batang langsing diputar terhadap sumbu di O

Dari persamaan $I = \int r^2 \, dm$ dengan memasukan elemen massa $dm = \lambda \, dx$, dengan λ adalah massa persatuan panjang dan batas inegrasi dari $x = -l$ sampai $x = L - l$, diperoleh :

$$I = \int_{-1}^{l-1} x^2 \lambda \, dx = \frac{1}{3} \lambda \, x^3 \Big|_{-l}^{L-l}$$

$$= \frac{1}{3} \lambda \left| (L-l)^3 - (-1)^3 \right| \qquad \text{..... (5.17)}$$

$$= \frac{1}{3} \lambda \left[(L-1)^3 - (-1)^3 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \lambda \left(L^3 - 3L^2 l + 3Ll^2 \right)$$

Oleh karena massa batang langsing $M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \lambda L$ maka

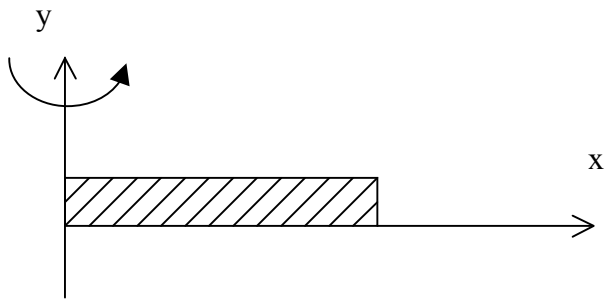
$$I = \frac{1}{3} M (L^2 - 3Ll + 3l^2)$$

Dengan $\int dm = \int_0^L \lambda dx = \lambda L$ .....(5.18)

Dari persamaan (5.17) tersebut diktahui jika sumbu putar (o) terletak ditengah – tengah batang suatu $l = \frac{L}{2}$, maka momen inersianya akan berharga $I = \frac{1}{12} ML^2$

Contoh 5.2

Sebuah batang langsing dengan rapat massa $\lambda = 0{,}9 kg/m$ diputar pada salah satu ujungya seperti ditunjukan dalam gambar 5.8.Apabila panjang batang 3 meter dan kecepatan sudutnya $\vec{\omega} = 30 \hat{j} \; rad \; s^{-1}$. Tentukan momen inersia dan momentum sudut batang langsing tersebut.



Gambar 5.8 Batang langsing diputar tehadap salah satu ujungnya.

Penyelaisaian :

Momen inersial batang langsing tersebut dihitung mengunakan persamaan (5.12),dan diperoleh.

$$I = \int_0^L x^2 \lambda \, dx = \frac{1}{3} \lambda \, x^3 \Big|_0^L = \frac{1}{3} \lambda \, L^3 = \frac{1}{3}(0{,}9)(3)^3 = \frac{1}{3}(0{,}9)(27) = 8{,}1 kg \; m^2$$

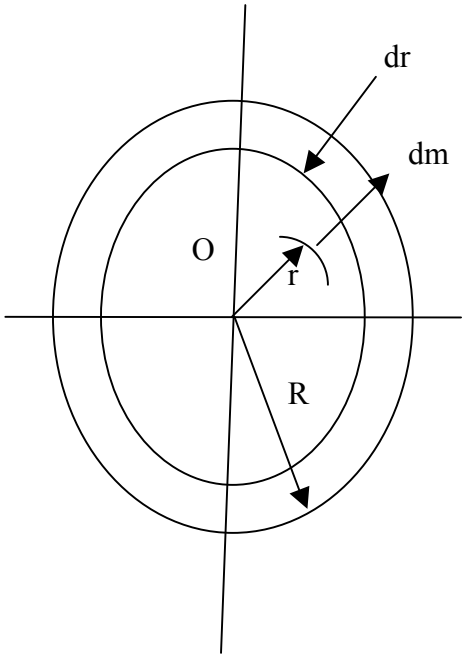
Sedangkan momentum sudutnya dihitung mengunakan persamaan (5.12), dan diperoleh.

$$\overline{L} = I\overline{\omega} = (8{,}1)(30\,\hat{j}) = 243\,\hat{j} \; Js$$

arahnya menuju sumbu y positif.

b. Piringan Tipis

Tinjau piringan tipis berjari-jari R yang mempunyai massa persatuan luas σ piringan diputar terhadap sumbu (tegak lurus bidang gambar) yang melalui titik o tepat pada sumbu simetrinya.



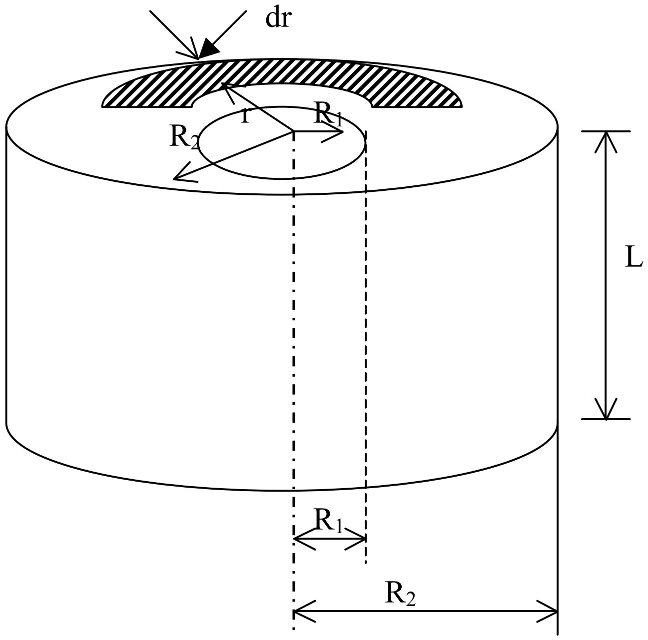
Gambar 5.9 Penampang piringan tipis

Momen inersia piringan dihitung dengan persamaan (5.14), dalam hal ini disubtitusikan $dm = \sigma \; dA$, dengan $dA = 2 \; \pi \; r \; dr$ adalah elemen luas, sehinnga :

$$I = \int_0^R \sigma \; 2 \; \pi \; r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \; \sigma \; R^4 \; \ldots\ldots\ldots\

c. Silinder Berongga Konsentris

Momen inersial silinder berongga yang panjangnya Ldengan jari-jari dalam R_i dan jari-jari luar R_2,yang sumbu putarnya terletak berimpit denga sumbu pusat silinder, juga dihitung mengunakan persamaan $I = \int r^2 \, dm$



Gambar 5.10. Silinder berongga konsentris.

Dalam hal ini elemen massa dm dihitung dadi elemen volume silinder setebal dr dan berjarak r dari sumbu rotasinya. Bila rapat massa silinder adalah p ,maka dapat dinyatakan

$$dm = \rho \, dv$$

$$dm = \rho \; 2\pi \; r \; L \; dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.22)$$

kemudian disubsitusikan kedalam persamaan $I = \int r^2 \, dm$, maka

$$I = \int r^2 \rho \; 2 \; \pi \; r \; L \; dr = 2\rho\pi L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

Apabila kerapatan massa (ρ) silinder tersebut tidak homogen ,maka penyelesaian integral tersebut tergantung pada hubungan p terhadap r. Untuk memudahkan penyelesaiannya (ρ) di anggap tetap dan tak bergantung pada r, sehingga

$$I = 2\rho\pi L \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{2} \rho\pi L r^4 \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$I = \frac{1}{2} \rho\pi L (R_2^4 - R_1^4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.23)$$

Karena massa total silinder konsentris

$$M = \int dm = \int_{R_1}^{R_2} 2\rho\pi rL dr = \rho\pi L(R_2^2 - R_1^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.24)$$

Maka secara umum momen inersia silinder berongga tersebut bila dinyatakan dalam massa total M, jari-jari R_2, dan jari – jari dalam R_1,menjadi

$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.25)$$

Sehingga untuk silinder pejal berjari-jari R (R_1= 0 dan R_2 =R) momen inersianya adalah

$$I = \frac{1}{2} M\ R^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.26)$$

Sehingga untuk silinder pejal berjari-jari R (R_1= 0 dan R_2 =R) momen inersianya adalah

$$I = \frac{1}{2} M\ R^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.27)$$

5.4 GERAK BENDA TEGAR

Dalam sub bab 5.2 telah diterangkan tentang analogi antara momentum sudut $\overline{L} = I\ \overline{\omega}$ dan momentum linier $\overline{p} = m\ \overline{v}$, dalam hal ini L analog dengan p , I analog dengan m, dan $\overline{\omega}$ analog dengan v . Ternyata bila kedua persamaan momentum tersebut dideferensialkan terhadap waktu, bentuknya juga identik, yaitu :

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = I \frac{d\overline{\omega}}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.28)$$

Besaran $\frac{d\overline{\omega}}{dt}$ tidak lain adalah percepatan sudut $\overline{\alpha}$, sedangkan $\frac{d\overline{L}}{dt}$ analog dengan $\frac{d\overline{p}}{dt}$ yang merupakan gaya penggerak $\overline{F}$. Oleh karena itu $\frac{d\overline{L}}{dt}$ merupakan penggerak dari gerakan rotasi, yang disebut momen gaya (torsi) $\overline{\tau}$, sehingga

$$\overline{\tau} = I\ \overline{\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.29)$$

Persamaan (5.18) ini dikenal sebagai hukum kedua Newton untuk gerak rotasi. Dari persamaan (5.18), bila momen gaya $\overline{\tau}$ memutar benda dari kedudukan sudut θ_1 ke sudut θ_2, maka kerja yang dilakukannya adalah

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \overline{\tau}\ d\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.30)$$

Dengan $d\theta$ adalah vektor perpindahan sudut yang arahnya adalah arah maju sekrip putar kanan. Dengan memasukkan $\overline{\tau}$ dari persamaan (5.29), maka

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I\ \overline{\alpha}\ d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I \frac{d\overline{\omega}}{dt} d\theta$$

Bentuk integrasi terhadap θ dapat diubah menjadi integrasi terhadap ω karena $d\theta / dt = \omega$, sehingga batas integrasinya juga berubah dari ω_1 sampai ω_2. Mengingat $d\overline{\omega}$ dan $\overline{\omega}$ mempunyai arah yang sama, maka

$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\ \omega\ d\omega$$

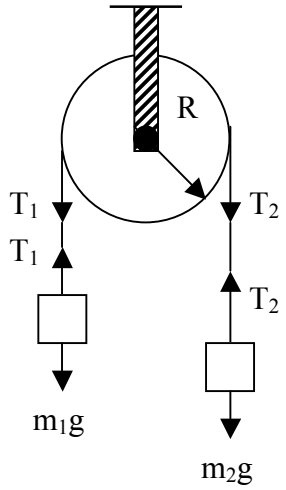
$$W = \frac{1}{2} I\ \omega_2^2 - \frac{1}{2} I\ \omega_1^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5.31)$$

Besaran $\frac{1}{2} I\omega^2$ disebut sebagai energi kinetik rotasi benda tegar.

Contoh 5.5

Mesin atwood menahan balok dengan massa $m_2 = 800gr$ dan $m_1 = 600gr$. Jari-jari roda katrol 4 cm. ketika dilepas m_2 turun sejauh 100 cm dalam waktu 8 detik. Berapakah momen inersia katrol, nilai geseran antara as dengan roda diabaikan dan percepatan gravitasi $g = 10m/s^2$?

Penyelesaian:



Gb. 5.11 Gerakan balok pada mesin Atwood

Setelah m_2 dilepas roda berputar, dalam hal ini gaya penggerak rotasinya adalah resultan dari gaya tegangan tali, sehingga dari hukum kedua Newton untuk gerak rotasi dapat dinyatakan

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha$$

Bila kedua ruas persamaan diatas dikalikan dengan jari-jari R, maka momen inersianya dapat dinyatakan sebagai fungsi percepatan linier (a) dari massa m_1 dan massa m_2, yaitu :

$$I = \frac{(T_2 - T_1)R^2}{a}$$

pada gerakan m_1 dan m_2 berlaku hukum kedua Newton, yaitu :

$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$

Bila masing-masing dari kedua ruas bersamaan tersebut pijumlakan akan diperoleh

$$m_2 g - T_2 + T_1 - m_1 g = m_2 a + m_1 a$$

$$T_2 - T_1 = (m_2 - m_1)g - (m_2 + m_1)a$$

percepatan linier kedua masa panahan sama besar dan dapat di tentukan melalui jarak yang ditempu salah satu massa panahan (y) selama waktu (t) yang ditinjau pada kasus ini.

$$y = \frac{1}{2} a t^2$$

$$a = \frac{2y}{t^2} = \frac{(2)(1)}{8^2} = 0{,}031 m/s^2$$

sehingga

$$T_2 - T_1 = (m_2 - m_1)g - (m_2 + m_1)a$$

$$T_2 - T_1 = (0{,}8 - 0{,}6)10 - (0{,}8 + 0{,}6)0{,}031 = 2 - 0{,}043 = 1{,}957N$$

dengan demikian dari persamaan (5.27)diperoleh momen inersia roda sebesar

$$I = \frac{(T_2 - T_1)R^2}{a} = \frac{(1{,}957)(0{,}04)^2}{0{,}031} = 0{,}101 kg\ m^2$$

5.5 KEKEKALAN MOMENTUM SUDUT

Pada sub yang lalu telah dijelaskan bahwa

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt} \quad \text{..... (5.32)}$$

bila $\bar{\tau} = 0$ maka $\frac{d\bar{L}}{dt} = 0$, sehingga $\bar{L} = tetap$. Jadi, bila momen gaya eksternal resultan yang bekerja sama dengan nol, maka momentum sudut total sistem tetap. Prinsip ini dikenal sebagai prinsip kekekalan momentum sudut.

Tinjau suatu benda tegar berotasi menggelilingi sumbu z yang tetap, momentum sudut benda tersebut adalah

$$\bar{L}_Z = I\ \bar{\omega} \quad \text{..... (5.33)}$$

Dengan I adalah momen inersia benda, sedangkan $\bar{\omega}$ adalah kecepatan sudutnya. Bila tak ada momen gaya eksternal yang bekerja, maka $\bar{L}_Z$ tetap, sehingga bila I berubah maka $\bar{\omega}$ harus berubah agar efek perubahanya saling meniadakan, kekekalan momentum sudut akan berubah

$$I\ \bar{\omega} = I_0 \bar{\omega}_0 \quad \text{..... (5.34)}$$

Dengan I_0 dan $\bar{\omega}_0$adalah momen inersia benda dan kecepatan sudut mula-mula prinsip ini sering dipakai oleh penari balet atau peloncat indah untuk dapat berputar lebih cepat, yaitu dengan mengatur rentangan tangan maupun kakinya.

5.6 ANALOGI GERAK TRANLASI DAN ROTASI

Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas gerakan tranlasi dan rotasi, baik gerakan partikel maupun benda tegar. Kedua jnis gerakan ini mempunyai bentuk yang identik sehngga besaran – besaran dalam kedua gerakan tersebut dapat dibandingkan dalam bentuk tabel 5.1 di bawah ini

Tabel 5.1 Analogi besaran gerak tranlasi dan gerak rotasi

GERAK TRANSLASI	GERAK ROTASI
$\bar{r}$	$\bar{\theta}$
$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$	$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\theta}}{dt}$
$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$	$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$
$\bar{p} = m\bar{v}$	$\bar{L} = I\bar{\omega}$
$\bar{F} = m\bar{a} = \frac{d\bar{p}}{dt}$	$\bar{\tau} = I\bar{\alpha} = \frac{d\bar{L}}{dt}$
$W = \Delta E_k = \int \bar{F}.\bar{r}$	$W = \Delta E_{kR} = \int \bar{\tau}.\bar{\theta}$
$\int \bar{F}dt = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1$	$\int \bar{\tau}dt = I\bar{\omega}_2 - I\bar{\omega}_1$
$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = tetap$	$mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = tetap$
$P = \bar{F}.\bar{v}$	$P = \bar{\tau}.\bar{\omega}$

Latihan Soal:

1. diketahui $\omega = 4800\,putaran/menit$
Ditanyakan : $f = ?$

2. Silinder dengan diameter 10 cm, berputar dengan kecepatan sudut 720 putaran./menit.
Ditanyakan : kecepatan linier ?

3. Sebuah piringan dengan diameter 80 cm, mula-mula diam, kemudian diberi percepatan sehingga setelah 20 detik kecepatan sudutnya 100 rad/det
Ditanyakan :
a) Percepatan sudut (α)
b) Sudut (θ)

4. Sebuah piringan dengan diameter 40 cm, mula-mula bergerak dengan kecepatan sudut ω_0 dan sudut yang ditempuh $\theta = 234 radian$, kemudian setelah 3 detik kecepatan sudutnya $\omega_t = 108 pps$.
Berapa percepatan sudutnya?

5. Mesin atwood menahan balok dengan massa $m_2 = 1200gr$ dan $m_2 = 2000gr$. Jari-jari roda katrol 8 cm. ketika dilepas m_2 turun sejauh 200 cm dalam waktu 12 detik. **Berapakah** momen inersia katrol, nilai geseran antara as dengan roda diabaikan dan percepatan gravitasi $g = 9{,}8m/s^2$?

6. Sebuah batang langsing dengan rapat massa $\lambda = 0{,}6kg/m$ diputar pada jarak $x = -\frac{L}{4}$ salah satu ujungya. Apabila panjang batang $L = 180cm$ dan kecepatan sudutnya $\overline{\omega} = 30\hat{j}\ rad\ s^{-1}$. **Tentukan** momen inersia dan momentum sudut batang langsing tersebut jika diputar terhadap sumbu y ?

7. Tiga benda kecil yang massanya masing-masing $m_A = 0{,}8kg, m_B = 0{,}5kg$ dan $m_C = 0{,}6kg$, diletakan berturut – turut pada titik A(3; 2))m, B(7; 4)m dan C(7; 6)m dan dihubungkan dengan batang tegar yang massanya dapat diabaikan. **Berapakah** momen inersia dan momentum sudut sistem ini bila diputar terhadap sumbu x dengan kecepatan sudut $15\hat{i}$ rad s^{-1} ?

8. Sebuah roda diameternya $d = 80cm$ berotasi pada sumbunya dengan percepatan sudut (anguler) $\alpha = 30\,putaran/s^2$. Jika kecepatan sudut awal $(t = 0s)$ adalah $\omega_0 = 120\,putaran/menit$.

Ditanyakan :

a) Kecepatan sudut pada $t = 3s$ (dalam satuan rad/s)
b) Sudut yang ditempuh pada $t = 3s$ (dalam radian)
c) Kecepatan linier pada $t = 3s$ (dalam m/s)
d) Percepatan linier pada $t = 3s$ (dalam m/s^2)

9. Sebuah benda mempunyai massa $m = 7{,}5kg$ berada pada titik $\bar{r} = 2i + 3j + 4k$ bergerak dengan kecepatan $V = 10m/s$ mengapit sudut $30^0, 45^0\ dan\ 60^0$ masing-masing terhadap sumbu X, Y dan Z begitu juga dengan percepatan $a = 15m/s^2$ mengapit sudut masing-masing $53^0, 45^0\ dan\ 37^0$

Ditanyakan :

a) Momentum sudut $(\overline{L})$
b) Momen gaya $(\overline{\tau})$

10. Sebuah roda diameternya $d = 50cm$ berotasi pada sumbunya dengan kecepatan sudut awal $(t = 0s)$ adalah $\omega_0 = 1000\,putaran/menit$. Pada $t = 5s$ kecepatan sudut $\omega_t = 400\,putaran/menit$.

Ditanyakan :

a) Sudut (θ) dan percepatan sudut (α)
b) Sesudah 5 detik, berapa waktu yang dibutuhkan lagi hingga roda berhenti

REFERENSI

1. **Sears, Francis W, Zemansky, Mark W dan Young Hugh D, 1998, *"Univercity Physics"*, Addison-Wesley Series in physics.**
2. **Halliday, David dan Reisnick, 1994, "Fisika Jilid I", alih bahasa, Pantur Silaban dan Erwin Sucipto, Cetakan ke 9, Penerbit Erlangga, Jakarta.**
3. **Dosen-dosen Fisika – FMIPA – ITS. "Fisika II" , ITS, 2001.**